http://www.xriadiat.com **DS1: R** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : $(1{,}5\text{pts})$ Montrer que : $\forall x\geq 1\ ;\forall y\geq 4:\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow x=2\ et\ y=8$.

Solution : Soient : $x\geq 1\quad et\quad y\geq 4$

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}=x+y\ \Rightarrow 2\sqrt{x-1}+2\times 2\sqrt{y-4}=\sqrt{x-1}^2+\sqrt{y-4}^2+5$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x-1}+1+\sqrt{y-4}^2-2\times 2\sqrt{y-4}+2^2=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x-1}-1=0\ et\ \sqrt{y-4}-2=0\ \Rightarrow\sqrt{x-1}=1\ et\ \sqrt{y-4}=2$

$\Rightarrow x-1=1\ et\ y-4=4\ \Rightarrow x=2\ et\ y=8$

Exercice2 : $(1{,}5\text{pts})$ Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq y\ et\ x\times y\neq 1\Rightarrow\dfrac{x}{x^2+x+1}\neq\dfrac{y}{y^2+y+1}$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{y}{y^2+y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x\times y=1$??

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

On a : $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{y}{y^2+y+1}\Rightarrow x\left(y^2+y+1\right)=y\left(x^2+x+1\right)$

$\Rightarrow xy^2+xy+x=yx^2+yx+y\Rightarrow xy^2-yx^2+x-y=0\Rightarrow xy(y-x)-(y-x)=0$

$\Rightarrow(y-x)(xy-1)=0\Rightarrow y-x=0\ \ ou\ \ x\times y-1=0\ \Rightarrow x=y\ \ ou\ \ x\times y=1$

Donc : $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{y}{y^2+y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x\times y=1$

Donc par contraposition on déduit que : $x\neq y\ et\ x\times y\neq 1\Rightarrow\dfrac{x}{x^2+x+1}\neq\dfrac{y}{y^2+y+1}$

Exercice3 : $(1{,}5\text{pts})$ Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{4n+2026}\notin\mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n+2026}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n+2026}=m$

$\sqrt{4n+2026}=m\Leftrightarrow 4n+2026=m^2\Rightarrow 2(2n+1013)=m^2\Rightarrow m^2=2k$ avec $k=2n+1013\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow m^2$ est pair $\Rightarrow m$ est pair $\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $m=2k'$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $2(2n+1013)=(2k')^2$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $2n+1013=2k'^2$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $1013=2k'^2-2n$

$\Rightarrow\exists k'\in\mathbb{N}$ tel que : $1013=2\left(k'^2-2\right)$

$\Rightarrow 1013$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 1013 est impair

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{4n+2026}\notin\mathbb{N}$

Exercice4 : $(1{,}5\text{pts})$ Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$.

Solution : Notons P(n) La proposition :" $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1^2}{(2\times1-1)(2\times1+1)}=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$ et $\dfrac{1\times(1+1)}{2(2\times1+1)}=\dfrac{2}{2\times2}=\dfrac{1}{3}$

Donc $1=1$. Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2(2n+3)}$??

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$

et on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n\times(n+1)(2n+3)}{2(2n+1)(2n+3)}+\frac{2(n+1)^2}{2(2n+1)(2n+3)}$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)(2n+3)+2(n+1)^2}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)\left[n\times(2n+3)+2(n+1)\right]}{2(2n+1)(2n+3)}$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$

Et on remarque que : $2n^2+5n+2=(2n+1)(n+2)$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$ c'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$

Exercice5 : (4pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Considérons la fonction f périodique de période 2 tel que : $f(x)=x-1\quad\forall x\in[0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;6[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

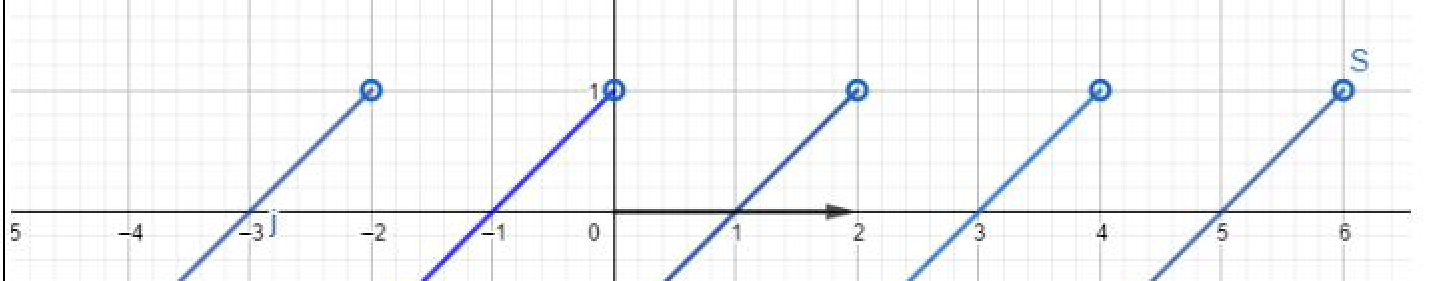
2) Calculer : $f(9)$; $f(-8{,}5)$; $f(2025)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;2[$:

$f(x)=x-1\quad\forall x\in[0;2[$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;6[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2]$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) →Calculons : $f(9)$

$f(9)=f(8+1)=f(2\times4+1)=f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$

Et puisque : $1\in[0;2[$ alors : $f(9)=f(1)=1-1=0$

→Calculons : $f(-8{,}5)$

$f(-8{,}5)=f(-8-0{,}5)=f(-0{,}5)=f(-2\times1+1{,}5)=f(1{,}5)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$ Et puisque : $1{,}5\in[0;2[$ alors : $f(-8{,}5)=f(1{,}5)=1{,}5-1=0{,}5$

→Calculons : $f(2025)$

$f(2025)=f(2\times1012+1)=f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$

Et puisque : $1\in[0;2[$ alors : $f(2025)=f(1)=1-1=0$

3) l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[2k;2(k+1)[\Leftrightarrow 2k\leq x\prec 2(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\leq x-2k\prec 2\Leftrightarrow f(x-2k)=f(x)$

$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=x-2k-1\ :\ k\leq\dfrac{x}{2}\prec k+1$

Car : $2k\leq x\prec 2(k+1)\Leftrightarrow k\leq\dfrac{x}{2}<k+1\Leftrightarrow E\left(\dfrac{x}{2}\right)=k$

Exercice6 : (3, 5pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+5\neq0\ \ et\ \ x\geq0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\neq-5\ \ et\ \ x\geq0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\geq-1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-(-1)=f(x)+1=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}+1=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}\geq0$

Donc $f(x)\geq-1\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et on a :

$f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}=0\Leftrightarrow x=0$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x)\geq f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $x\in\mathbb{R}^+$; $f(x)-1=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}-1=\dfrac{-10}{\sqrt{x}+5}\prec0$

Donc : $f(x)\prec1\quad\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc : f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

Exercice7 : (6,5pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+2\text{pts})$

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=x\sqrt{x}$ et $f(x)=x^2-2x+2$

1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : g est croissante sur D_g

3) En déduire que : $g(x)\in[0;1]\ \forall x\in[0;1]$

4) Donner le tableau de variation de f

5) On considère la fonction h tel que : $h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad\forall x\succ0$ b) Étudier la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

Solution :1) a) $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\}=[0,+\infty[$ et $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrons que :g est croissante sur $[0,+\infty[$

g Est le produit de deux fonctions croissantes sur $[0,+\infty[$ donc : g est croissante sur $[0,+\infty[$

3) Déduction que : $g(x)\in[0;1]\ \forall x\in[0;1]$

$x\in[0;1]\Rightarrow0\leq x\leq1\Rightarrow g(0)\leq g(x)\leq g(1)$ car : :g est croissante sur $[0,+\infty[$

$\Rightarrow0\leq g(x)\leq1\Rightarrow g(x)\in[0;1]$

4) Le tableau de variation de f : $f(x)=x^2-2x+2$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=2$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2}{2\times1}=1$ Et $\beta=f(\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times1+2=1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

5) $h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$

a) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad\forall x\succ0$ on a : $g(x)=x\sqrt{x}$ et $f(x)=x^2-2x+2$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left(x\sqrt{x}\right)^2-2x\sqrt{x}+2\ =x^3-2x\sqrt{x}+2$; $\forall x\succ0$

b) Étude de la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

a) Sur $[0;1]$: On a $h(x)=(f\circ g)(x)$

Puisque g est croissante sur $[0;1]$ et $g([0;1])\subset[0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $[0;1]$

b) Sur $[1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $g([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et f est croissante sur $[1;+\infty[$ alors $h=f\circ g$ est croissante sur $[1;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien