http://www.xriadiat.com **DS1: Q** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

On considère les propositions suivantes : $P\ :(\forall m\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}): f(x)\succ m$

Q : « L'application f est pair » ou « l'application f est impair »

1)Déterminer la négation de la proposition P et montrer que P est fausse (justifier avec un raisonnement logique)

2)Déterminer la négation de Q et donner sa valeur de vérité (justifier avec un raisonnement logique)

Solution : 1) $P\ :(\forall m\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}): f(x)\prec m$ donc : $\overline{P}\ :(\exists m\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)\geq m$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=x^2+2x=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$

On a : $(x+1)^2\geq 0$ donc : $(x+1)^2-1\geq -1$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)\geq -1$

Donc : $\overline{P}\ :(\exists m=-1\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)\geq m$

C'est-à-dire : $\overline{P}\ :(\exists m\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)\geq m$ est vraie

Par suite : P est une proposition fausse

2) Q : « L'application f est pair » ou « l'application f est impair »

$\overline{Q}$: « L'application f n'est pas pair » et « l'application f n'est pas impair »

On peut aussi dire : $\overline{Q}$: « L'application f n'est ni pair ni impair »

f est n'est pas pair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=3$ et $f(-1)=-1$ donc $f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc : $\overline{Q}$: est vraie

Par suite : Q est une proposition fausse

Exercice2 : (4pts) : $(1\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) a) En utilisant un raisonnement par équivalence : montrer que : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1}\leq a+1$

b) Montrer que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$: $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

2) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq x+y+1$

Indication : appliquer b) puis a)

Solution :1) Soit : $a\in\mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{2a+1}\leq a+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2a+1}\right)^2\leq(a+1)^2\Leftrightarrow 2a+1\leq a^2+2a+1\Leftrightarrow 0\leq a^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1}\leq a+1$ est aussi une Proposition vraie

2) Soit : $(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$

$\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\leq\frac{a^2+b^2}{2}$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\leq 2a^2+2b^2\Leftrightarrow 2ab\leq a^2+b^2\Leftrightarrow 0\leq a^2+b^2-2ab\Leftrightarrow 0\leq(a-b)^2$

Donc : $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow 0\leq(a-b)^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$: $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ est aussi une Proposition vraie

2) Soient : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$

$x\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow x\succ 0\Rightarrow 4x\succ 0\Rightarrow 4x+1\succ 1\quad et\ 1\succ 0\Rightarrow a=4x+1\succ 0$

$y\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow y\succ 0\Rightarrow 4yx\succ 0\Rightarrow 4y+1\succ 1\quad et\ 1\succ 0\Rightarrow b=4y+1\succ 0$

D'après b) on a alors : $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{\frac{\sqrt{4x+1}^2+\sqrt{4y+1}^2}{2}}$

Donc : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{\frac{4x+1+4y+1}{2}}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{\frac{4x+4y+2}{2}}$

Donc : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{2x+2y+1}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq\sqrt{2(x+y)+1}$ ❶

D'après a) et puisque : $a=x+y\succ 0$ alors : $\sqrt{2(x+y)+1}\leq x+y+1$ ❷

De : ❶ et ❷ En déduit que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq x+y+1$

Exercice3 : (2pts)

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Solution : Notons P(n) La proposition " $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1(1+1)=2$ et $\frac{1}{3}\times 1(1+1)(1+2)=\frac{1}{3}\times 2\times 3=2$.

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$??

On a : $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\left[1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)\right]+(n+1)(n+2)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Donc $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)=(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Exercice18 : (2pts) Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Solution : Remarque : Raisonnement par Disjonction des cas : Pour montrer l'implication : « (P_1 ou P_2 ou ⋯ ou P_n) ⇒Q »,

On montre successivement les différentes implications « P_k ⇒Q », pour chaque k ∈ [[1 ; n]].

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement

Pour n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

<u>1cas :</u> $n=3k$

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)=3k'$ Avec $k'=k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>2cas :</u> $n=3k+1$ $\quad n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$n(n+1)(n+2)=3(3k+1)(3k+2)(k+1)=3k'$

Avec $k'=(3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>3cas :</u> $n=3k+2$

$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=3(3k+2)(k+1)(3k+4)=3k'$

Avec $k'=(3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$; $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice17 : (2pts) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

Démontrer que : -4 est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^+$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2-4$

Donc : $f(x)=(x+\sqrt{x})^2-4$ et donc : $f(x)+4=(x+\sqrt{x})^2\geq 0$

Donc : $f(x)+4\geq 0$ par suite : $f(x)\geq -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

Donc : $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

Exercice6 : (7pts) : $(2\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+3\text{pts})$

Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

1) Donner le tableau de variations de f et g

2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminer D_h

b) Calculer : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad\forall x\in D_h$

3) Etudier les variations de h sur les intervalles : $]-\infty;0[$; $]0;2]$; $[2;4[$ et $]4;+\infty[$

Solution : 1) a) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$; on a $f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ $\quad\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3>0$

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(-1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-1$ et $y=2$.

<u>Donc le tableau de variations de</u> f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

b) $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$: $D_g=\mathbb{R}$

Le tableau de variation de g : On a : $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=-1$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

$\alpha=-\frac{2}{-2\frac{1}{2}}=2$ et $\beta=g(\alpha)=g(2)=-\frac{1}{2}2^2+2\times 2-1=1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	1	↘

2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminons D_h :

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\}$

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et D_g

$x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1\neq -1\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ -\frac{1}{2}x^2+2x\neq 0$

$x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ;x\left(-\frac{1}{2}x+2\right)\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ x\neq 0\ et\ x\neq 4$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{0;4\}=]-\infty;0[\cup]0;4[\cup]4;+\infty[$

b) Calculons : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$; $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{2\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right)-1}{-\frac{1}{2}x^2+2x-1+1}=\frac{2x^2-8x+6}{x^2-4x}$

Donc : $h(x)=\frac{2x^2-8x+6}{x^2-4x}$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	↗	-1 ↗	1	↘ -1	↘

3) →Etude des variations de h sur l'intervalle : $]-\infty;0[$

On a : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$

Puisque g est croissante sur $]-\infty;0[$ et $g(]-\infty;0[)\subset]-\infty;-1[$ et f est croissante sur $]-\infty;-1[$ alors h est croissante sur $]-\infty;0[$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $]0;2]$

Puisque g est croissante sur $]0;2]$ et $g(]0;2])\subset]-1;1]$ et f est croissante sur $]-1;-1]$ alors h est croissante sur $]0;2]$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $[2;4[$

Puisque g est décroissante sur $[2;4[$ et $g([2;4[)\subset]-1;1]$ et f est croissante sur $]-1;1]$ alors h est décroissante sur $[2;4[$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $]4;+\infty[$

Puisque g est décroissante sur $]4;+\infty[$ et $g(]4;+\infty[)\subset]-\infty;-1[$ et f est croissante sur $]-1;1]$ alors h est décroissante sur $]4;+\infty[$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$h(x)$	↗	‖ ↗	$\frac{1}{3}$	↘ ‖	↘

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien