http://www.xriadiat.com **DS1: O** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1,5\text{pts}\times 2)$ Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes (justifier les réponses)

1) $S: (\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}) / x+2y\leq 1$

2) $T: (\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R}) / a^2+2b^2\succ 4ab$

Solution : 1) $S: (\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}) / x+2y\leq 1$

$\overline{S}: (\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}) / x+2y\succ 1$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $x+2y\succ 1$ signifie que : $y\succ\frac{1}{2}(1-x)$

Par exemple on prend : $y=\frac{1}{2}(1-x)+1$

On a donc : $x+2y=x+1-x+2=3\succ 1$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\left(\exists y=\frac{1}{2}(1-x)+1\in\mathbb{R}\right)/ x+2y\succ 1$ vraie

Donc : $\overline{S}$: est une proposition vraie par suite : S est une proposition fausse.

2) $T: (\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R}) / a^2+2b^2\succ 4ab$

Soit : $a\in\mathbb{R}$ (fixe) : $a^2+2b^2\succ 4ab$ signifie que : $2b^2-4ab+a^2\succ 0$ (considérer comme une inéquation du 2 ieme degré avec variable $b\Rightarrow\Delta=16a^2-8a^2=8a^2\geq 0\Rightarrow$ l'inéquation admet au moins une solution.
(Faire un tableau de signe)

$(\exists b\in\mathbb{R}) / a^2+2b^2\succ 4ab$ est vraie.

Donc : T est une proposition vraie

Exercice2 : (2,5pts) : Montrer par disjonction des cas que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{n^{2024}+1+(n+1)^{2025}}{2}\in\mathbb{N}$

Solution : il suffit de montrer que : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est un entier pair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de x, il est parfois utile de faire une disjonction de cas : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre x.
On peut, par exemple, séparer les cas où x est un entier pair des cas où x est impair, ou encore séparer les cas où x est un réel positif des cas où il est strictement négatif.

Premier cas : si n est pair : alors n^{2024} est aussi pair (comme produit de nombres pairs)
Alors : $n^{2024}+1$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
D'autre part : $n+1$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
Alors : $(n+1)^{2025}$ est aussi impair (comme produit de nombres impairs)
Donc : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est pair (comme somme de nombres impairs)

2 iem cas : si n est impair : alors n^{2024} est aussi impair (comme produit de nombres impairs)

Alors : $n^{2024}+1$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)
D'autre part : $n+1$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)
Alors : $(n+1)^{2025}$ est aussi pair (comme produit de nombres pairs)
Donc : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est pair (comme somme de nombres pairs)

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{n^{2024}+1+(n+1)^{2025}}{2}\in\mathbb{N}$

Exercice3 : (2pts) : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : " $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{1-1}1^2=1$ et $\frac{1(1+1)}{2}(-1)^{1+1}=1\times(-1)^2=1$

Donc P(1) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$??

Remarque : $(-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n\times 1=(-1)^n$ et

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2+(-1)^n(n+1)^2=S_n+(-1)^n(n+1)^2$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}+(-1)^n(n+1)^2=\frac{1}{2}\left(-n(n+1)(-1)^n+2(-1)^n(n+1)^2\right)$

Car : $(-1)^{n+1}=(-1)^n\times(-1)^1=-(-1)^n$

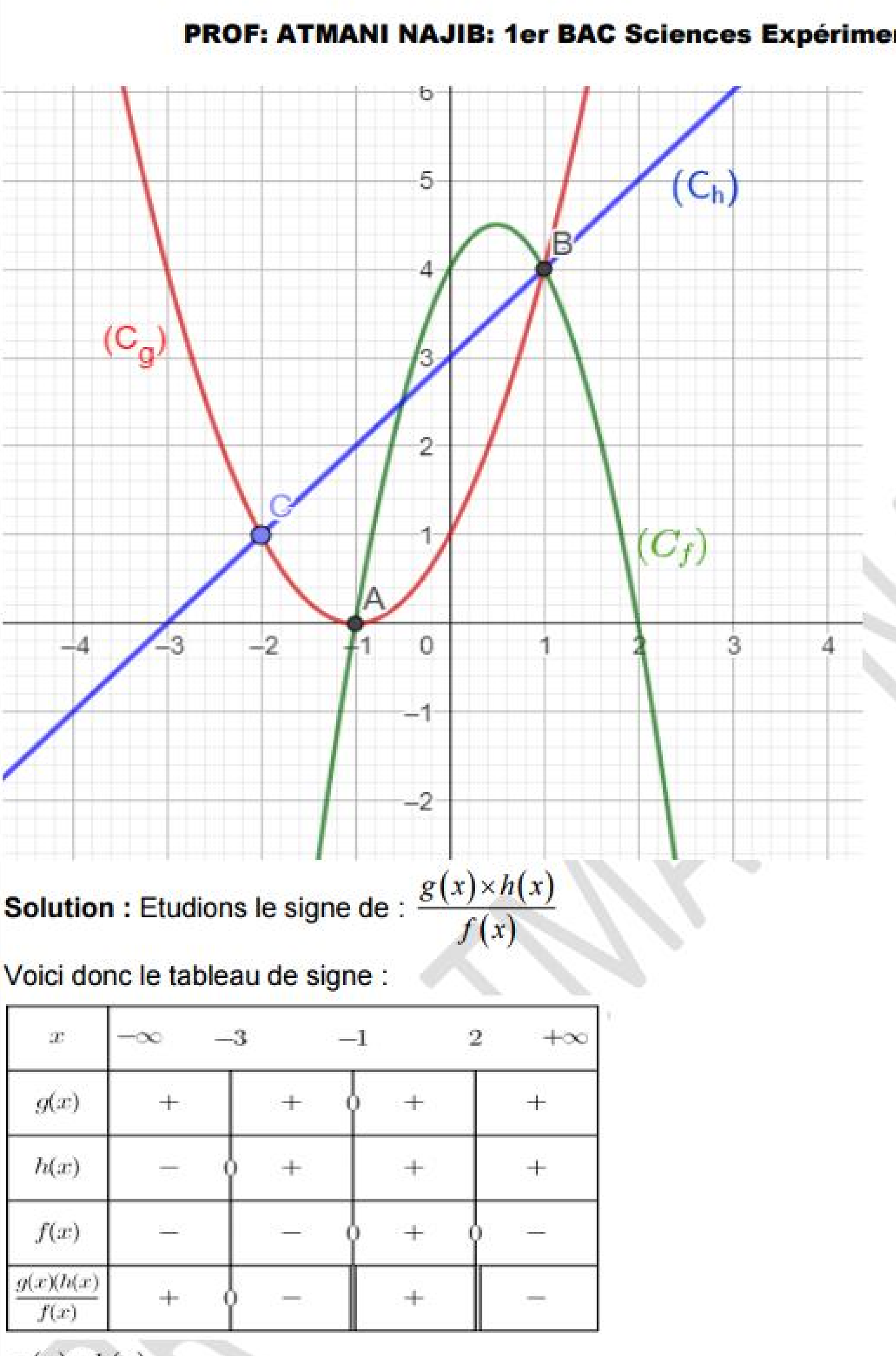
Donc : $S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)(-1)^n(-n+2(n+1))=\frac{1}{2}(-1)^n(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Exercice4 : (2,5pts) Soient f ; g et h trois fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) et (C_h) si dessous :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{g(x)\times h(x)}{f(x)}\geq 0$



Solution : Etudions le signe de : $\frac{g(x)\times h(x)}{f(x)}$

Voici donc le tableau de signe :

x	$-\infty$	-3		-1		2	$+\infty$
$g(x)$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{g(x)h(x)}{f(x)}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$

$\frac{g(x)\times h(x)}{f(x)}\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-3\right]\cup\left]-1;2\right[$

$S=\left]-\infty;-3\right]\cup\left]-1;2\right[$

Exercice5 : (1,5pts) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

Démontrer que : -4 est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^+$

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2-4$

$f(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4$ Donc : $f(x)+4=\left(x+\sqrt{x}\right)^2\geq 0$

Donc : $f(x)+4\geq 0$ par suite : $f(x)\geq -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

Donc : $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

Exercice6 : (8,5 pts) $(1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f une fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x+2 & ; x\leq 0 \\ f(x)=\sqrt{x+4} & ; x\succ 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) a) Démontrer que : f admet un minimum relatif en -1

b) Démontrer que : f admet un minimum absolu en -1

3) Donner le tableau de variation de f :

4) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Vérifier que : $\forall a\in[2;+\infty[$; $f(a^2-4)=a$

b) Montrer que : f n'est pas majorée

6) a) Déterminer $f\circ f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

b) Étudier les variations de $f\circ f$

Solution :1) $D_1=\{x\in\mathbb{R} / x\leq 0\}=\left]-\infty;0\right]$ et $D_2=\{x\in\mathbb{R} / x+4\geq 0 \text{ et } x\succ 0\}=\left]0;+\infty\right[$

Donc : $D_f=D_1\cup D_2=\mathbb{R}$

2) a) Montrons que : $x\in\left]-\infty;0\right[$; $f(-1)\leq f(x)$

On a : $f(-1)=(-1)^2+2(-1)+2=1$

Si $x\in\left]-\infty;0\right[$; $f(x)-f(-1)=x^2+2x+2-1=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$

Donc : $x\in\left]-\infty;0\right[$; $f(-1)\leq f(x)$

Donc : f admet un minimum relatif en -1

b) Si $x\in\left]-\infty;0\right]$; $f(x)-f(-1)=x^2+2x+2-1=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$

Donc : $x\in\left]-\infty;0\right]$; $f(-1)\leq f(x)$

Si $x\in\left]0;+\infty\right[$; $x\succ 0\Rightarrow x+4\succ 4\Rightarrow\sqrt{x+4}\succ\sqrt{4}=2\succ 1=f(-1)$

Donc : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$; $f(-1)\leq f(x)$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(-1)\leq f(x)$

D'où : f admet un minimum absolu en -1

3) tableau de variation de f :

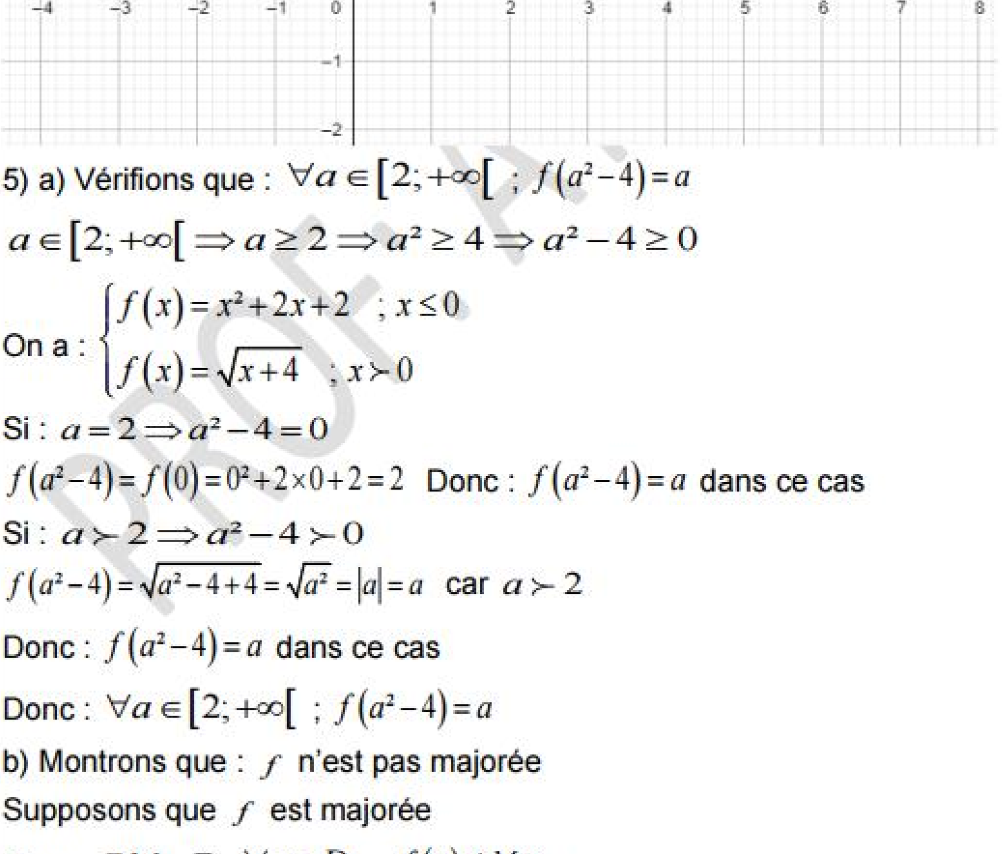
x	0	$+\infty$
$\sqrt{(x+4)}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$	-1	0
x^2+2x+2	↘	1	↗

D'où :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+2x+2	↘	1	↗ 2	↗

4) Traçage de la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) a) Vérifions que : $\forall a\in[2;+\infty[$; $f(a^2-4)=a$

$a\in[2;+\infty[\Rightarrow a\geq 2\Rightarrow a^2\geq 4\Rightarrow a^2-4\geq 0$

On a : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x+2 & ; x\leq 0 \\ f(x)=\sqrt{x+4} & ; x\succ 0 \end{cases}$

Si : $a=2\Rightarrow a^2-4=0$

$f(a^2-4)=f(0)=0^2+2\times 0+2=2$ Donc : $f(a^2-4)=a$ dans ce cas

Si : $a\succ 2\Rightarrow a^2-4\succ 0$

$f(a^2-4)=\sqrt{a^2-4+4}=\sqrt{a^2}=|a|=a$ car $a\succ 2$

Donc : $f(a^2-4)=a$ dans ce cas

Donc : $\forall a\in[2;+\infty[$; $f(a^2-4)=a$

b) Montrons que : f n'est pas majorée

Supposons que f est majorée

Donc : $\exists M\in\mathbb{R}$ $\forall x\in D_f$: $f(x)\leq M$ ©

Soit : a tel que $a\succ M$ et $a\geq 2$:c'est-à-dire : $a\in[2;+\infty[$

D'après la question précédente : on a : $f(a^2-4)=a\Rightarrow f(a^2-4)\succ M$ contradiction avec : ©

Donc : f n'est pas majorée.

6) a) Déterminons $f\circ f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$f\circ f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Si $x\in\left]-\infty;0\right]$; $f\circ f(x)=f(f(x))=f(x^2+2x+2)=\sqrt{x^2+2x+2+4}=\sqrt{x^2+2x+6}$ car $x^2+2x+2\succ 0$

Si $x\in\left]0;+\infty\right[$; $f\circ f(x)=f(f(x))=f\left(\sqrt{x+4}\right)=\sqrt{\sqrt{x+4}+4}$ car $\sqrt{x+4}\succ 0$

b) Étude des variations de $f\circ f$:

- Puisque f est croissante sur $[-1;+\infty[$ et $f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$ et f est croissante sur $f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$ alors $f\circ f$ est décroissante sur $[-1;+\infty[$
- Puisque f est décroissante sur $\left]-\infty;-1\right]$ et $f(\left]-\infty;-1\right])=[1;+\infty[$ et f est croissante sur $[1;+\infty[$ Alors $f\circ f$ est décroissante sur $\left]-\infty;-1\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien