http://www.xriadiat.com **DS1: O** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (4pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Déterminer, en justifiant la réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et déterminer leurs négations :

1) P : "$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$ ou $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

2) Q : « $\forall x \in \left]-\infty;-5\right]; -x^2-x+6 \leq 0$ »

3) R : « $\forall x \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x^6+1}-x=0$ »

4) S : « $\exists n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R} : n-1 \leq x^2$ »

Solution : 1) P : "$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$ ou $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

"$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$" est fausse car : "$\sqrt{16}+\sqrt{25}=4+5=9$ et $\sqrt{81}=9$"

$\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ Signifie : $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$ est fausse car :

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}=5+2\sqrt{6}$ Mais : $\sqrt{5}^2=5$

P : "$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$ ou $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$" est fausse

$\overline{P}$: "$\sqrt{81} = \sqrt{16}+\sqrt{25}$ et $\sqrt{3}\neq\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

2) Q : « $\forall x \in \left]-\infty;-5\right]; -x^2-x+6 \leq 0$ »

$-x^2-x+6$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 + 4 \times 1 \times 6 = 25$.

Comme : $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{25}}{2a}=\frac{1-5}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{25}}{2a}=\frac{1+5}{-2}=-3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in \left]-\infty;-3\right]; -x^2-x+6 \leq 0$ et Comme : $-5 \leq -3$

Q : « $\forall x \in \left]-\infty;-5\right]; -x^2-x+6 \leq 0$ » est vraie et $\overline{Q}$: « $\exists x \in \left]-\infty;-5\right]; -x^2-x+6 \succ 0$ »

3) R : « $\forall x \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x^6+1}-x=0$ » alors : $\overline{R}$: « $\exists x \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x^6+1}-x\neq0$ »

$\overline{R}$: « $\exists x \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x^6+1}-x\neq0$ »; il suffit de prendre : $x=1$: $1\in\mathbb{R}^+; \sqrt{1^6+1}-1=\sqrt{2}-1\neq0$

$\overline{R}$: est vraie par suite R : est fausse

4) S : « $\exists n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R} : n-1 \leq x^2$ »; est vraie il suffit de prendre :

$n=1$: $1\in\mathbb{N}; 1-1=0\leq x^2 \Rightarrow \exists n=1\in\mathbb{N}; \forall x\in\mathbb{R} : 1-1\leq x^2$

Exercice2 : (4,5pts) : $(1{,}5\text{pts}\times3)$

1) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) Montrer par disjonction des cas que : $\forall x\in\mathbb{R} : |x-1|\leq x^2-x+1$

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

Solution : 1) Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrons que : $\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\Rightarrow 2xy2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2=1$

$\Rightarrow 2xy-\sqrt{2}y-\sqrt{2}x+1=0\Rightarrow 2y\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2y-\sqrt{2}\right)=0\Rightarrow x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \text{ ou } 2y-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \text{ ou } y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Par contraposition on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) $\forall x\in\mathbb{R} : |x-1|\leq x^2-x+1$

Soit $x\in\mathbb{R}$: <u>Premier cas :</u> si $x-1\geq0$ c'est-à-dire ; $x\geq1\Rightarrow|x-1|=x+1$

$|x-1|\leq x^2-x+1\Leftrightarrow0\leq x^2-x+1-x+1\Leftrightarrow0\leq x^2-2x+2\Leftrightarrow0\leq(x-1)^2+1$

Comme : $0\leq(x-1)^2+1$ est une proposition vraie

Alors : si $x\geq1$: $|x-1|\leq x^2-x+1$

<u>2 ième cas :</u> si $x-1\prec0$ c'est-à-dire ; $x\prec1\Rightarrow|x-1|=-x-1$

$|x-1|\leq x^2-x+1\Leftrightarrow0\leq x^2-x+1+x-1\Leftrightarrow0\leq x^2$

Comme : $0\leq x^2$ est une proposition vraie

Alors : si $x\prec1$: $|x-1|\leq x^2-x+1$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall x\in\mathbb{R} : |x-1|\leq x^2-x+1$

3) Notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : Supposons que : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

3étapes : Montrons alors que : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$??

On a : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=\left(1+3+5+...+(2n+1)\right)+(2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

Donc : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+1)^2+(2n+3)$

$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

Donc : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice3 : (3,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+3x+5$

1) a) Démontrer que f est majorée.

b) Est ce que f admet une valeur maximale ?

2) Démontrer que f est non minorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=-x^2+3x+5=-\left(x^2-3x\right)+5$ $\quad x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

Donc on a : $f(x)=-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+5=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+5=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$

Donc : $f(x)-\frac{29}{4}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leq0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\leq\frac{29}{4}$ Par suite : f est majorée par $\frac{29}{4}$

b) On a : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{29}{4}$ donc : $f(x)\leq f\left(\frac{3}{2}\right) \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : f admet une valeur maximale c'est : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{29}{4}$

2) Démontrons que f est non minorée.

Supposons f minorée donc : $\exists m\in\mathbb{R} : m\leq f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R} : m\leq-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R} : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leq\frac{29}{4}-m$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R} : \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\leq\sqrt{\frac{29}{4}-m}$ (On peut toujours supposer $\frac{29}{4}\geq m$)

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R} : \left|x-\frac{3}{2}\right|\leq\sqrt{\frac{29}{4}-m}\Leftrightarrow-\sqrt{\frac{29}{4}-m}\leq x-\frac{3}{2}\leq\sqrt{\frac{29}{4}-m} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}-m}\leq x\leq\sqrt{\frac{29}{4}-m}+\frac{3}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$ absurde car on prend par exemple :

$x=\sqrt{\frac{29}{4}-m}+2025$ et $x>\sqrt{\frac{29}{4}-m}+\frac{3}{2}$

Donc f est non minorée

Exercice 4 : (8 pts) : $(0{,}5\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{x^4-1}{x^4+1}$

1) Etudier la parité de f

2) Montrer que f est majorée par 1 est minorée par -1

3)Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

a) Donner le tableau de variation de g :

b) Déterminer graphiquement : $g([0;2[)$

4) Soit h une fonction numérique tel que : $h(x)=x^4$

a) Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$

b) Vérifier que : $f=g\circ h$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^4+1}$

Etudions la parité de f

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $x^4+1\neq0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $x^4\neq-1$: qui est une proposition vraie

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{(-x)^4-1}{(-x)^4+1}=\frac{x^4-1}{x^4+1}=f(x)$ C'est à dire : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Montrons que f est majorée par 1 est minorée par -1

$f(x)-1=\frac{x^4-1}{x^4+1}-1=\frac{-2}{x^4+1}\prec0$

Donc : $f(x)<1$ dans $\mathbb{R}$

Donc : f est majorée par 1

$f(x)+1=\frac{x^4-1}{x^4+1}+1=\frac{2x^4}{x^4+1}\geq0$

Donc : $-1\leq f(x)$ dans $\mathbb{R}$

Donc : f est minorée par -1

3)Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

a) Donner le tableau de variation de g

$g(x)=\frac{x-1}{x+1}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2>0$

Donc :g est strictement croissante sur : $\left]-1;+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-1\right[$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	-1 $\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$

b) Déterminons : $g([0;2[)$

Du tableau de variation de g en déduit que : $g([0;2[)=\left[-1;\frac{1}{3}\right[$

4)Soit h une fonction numérique tel que : $h(x)=x^4$

a) Etudions les variations de h sur $\mathbb{R}^+$

Soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x_1\neq x_2$

$\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1^4-x_2^4}{x_1-x_2}=-\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right)}{x_1-x_2}=(x_1+x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right)>0$

car : $x_1\geq0$ et $x_2>0$ alors : $x_1+x_2>0$ et puisque : $x_1^2+x_2^2>0$

Par suite h est croissante sur $\mathbb{R}^+$

b) Vérifions que : $f=g\circ h$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{h(x)-1}{h(x)+1}=\frac{x^4-1}{x^4+1}=f(x)$

Donc : $f=g\circ h$

c) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

On a : $f=g\circ h$ sur $\mathbb{R}^+$

Puisque h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $f=g\circ h$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme f est une fonction paire

Alors : f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien