http://www.xriadiat.com **DS1: N** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et donner la valeur de vérité et la négation (justifier les réponses)

1) P: « l'équation $x^2-2x-5=0$ admet une solution dans l'ensemble des entiers naturels »

2) Q: « l'inéquation $x^2-3x-11\le 0$ n'admet pas de solution dans l'ensemble des nombres réels »

3) R: « Tout entier naturel multiple de 12 est divisible par 3 »

Solution :1) P: « $\exists x\in\mathbb{N}; x^2-2x-5=0$ »

$x^2-2x-5=0$: Δ = b² – 4ac = (-2)² + 4 x 1 x 5= 24.

Comme : Δ > 0, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{2-2\sqrt{6}}{2}=1-\sqrt{6}\notin\mathbb{N}$ et $x_2=\frac{2+2\sqrt{6}}{2}=1+\sqrt{6}\notin\mathbb{N}$

Par suite : P est une proposition fausse.

$\overline{P}$: « $\forall x\in\mathbb{N}; x^2-2x-5\neq 0$ »

2) $x^2-3x-11$: Δ = b² – 4ac = (-3)² + 4 x 1 x 11= 9+44=53 $\succ$ O .

Comme : Δ > 0, le trinôme possède deux racines distinctes

L'inéquation $x^2-3x-11\le 0$ admet au moins ses racines comme solutions

est une proposition fausse.

Q: $\forall x\in\mathbb{R}; x^2-3x-11\succ 0$

$\overline{Q}$: $\exists x\in\mathbb{R}; x^2-3x-11\le 0$

3) R: $\forall n\in\mathbb{N}$ « n est multiple de 12 $\Rightarrow$ n est divisible par 3 » est une proposition vraie.

En effet : Soit $n\in\mathbb{N}$

n est multiple de 12 $\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}/n=12k \Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}/n=3\times(4k)$

$\Rightarrow \exists k'\in\mathbb{N}/n=3\times k'$ avec : $k'=4k\in\mathbb{N}\Rightarrow$ n est divisible par 3

$\overline{R}$: $\exists n\in\mathbb{N}$ « n est multiple de 12 *et* n n'est pas divisible par 3 »

Exercice2 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-1;4] \Rightarrow x^2-3x-4>0$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.

Solution : 1) Soit $x\in\mathbb{R}$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $x^2-3x-4\le 0\Rightarrow x\in[-1;4]$

$\Delta=(-3)^2-4\times(-4)=9+16=25\succ 0$

Donc : deux racines : $x_1=\frac{3+\sqrt{25}}{2}=\frac{3+5}{2}=4$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{25}}{2}=\frac{3-5}{2}=-1$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x2-3x-4$		+	0	−	0	+	

$x^2-3x-4\le 0$ *si* $x\in[-1;4]$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x^2-3x-4\le 0\Rightarrow x\in[-1;4]$

Alors : Par contraposition :

$\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-1;4] \Rightarrow x^2-3x-4>0$

2) Méthode : Soit *P* une proposition mathématique.

Pour montrer que *P* est vraie, on peut supposer que *P* est fausse et obtenir une absurdité.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrons que : n^2+1 n'est pas un carré parfait.

Par l'absurde, supposons que n^2+1 est un carré parfait

Donc :il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que : $n^2+1=m^2$

On a : $n^2\prec n^2+1$ et $n^2+1\prec(n+1)^2$ (car $(n+1)^2-n^2+1=2n\succ 0$)

C'est-a-dire : $n^2\prec n^2+1\prec(n+1)^2$

Donc : $n^2\prec m^2\prec(n+1)^2$

Par suite : $n\prec m\prec n+1$

C'est-à-dire : il existe un entier naturel strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est contradictoire

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.

Exercice3 : (4,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Soit $n\in\mathbb{N}$: On pose : $U_n=n4^{n+1}-(n+1)4^n+1$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3(4^{n+1}-1)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre : $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Solution :1) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3(4^{n+1}-1)$

Soit : $n\in\mathbb{N}$ On a : $U_{n+1}=n4^{n+2}-(n+2)4^{n+1}+1$

$4U_n+3(4^{n+1}-1)=4(n4^{n+1}-(n+1)4^n+1)+3(4^{n+1}-1)=4n4^{n+1}-4(n+1)4^n+4+3\times 4^{n+1}-3$

$=n4^{n+2}-(n+1)4^{n+1}+3\times 4^{n+1}+1=n4^{n+2}+(-n-1+3)4^{n+1}+1=n4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1$

$=(n+1-1)4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-4\times 4^{n+1}+(2-n)4^{n+1}+1$

$=(n+1)4^{n+2}+(2-n-4)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-(2+n)4^{n+1}+1$

Donc : $4U_n+3(4^{n+1}-1)=n4^{n+2}-(n+2)4^{n+1}+1=U_{n+1}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3(4^{n+1}-1)$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $\alpha_0=4^{0+1}-1=4-1=3=3\times 1$ et $2n+3=2\times 0+3=3$

Le nombre α_0 est divisible par 3

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/\alpha_n=4^{n+1}-1=3k$

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/4^{n+1}=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/\alpha_{n+1}=4^{n+2}-1=3k'$

$\alpha_{n+1}=4^{n+2}-1=4^{n+1}\times 4-1=(3k+1)\times 4-1$

$\alpha_{n+1}=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)=3k'$ avec $k'=4k+1\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

3) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $U_0=0\times 4^{0+1}-(0+1)4^0+1=-1+1=0$ et 9divise 0

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/U_n=9k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k''\in\mathbb{N}/U_{n+1}=9k''$??

On a : $U_{n+1}=4U_n+3(4^{n+1}-1)$ et $\exists k\in\mathbb{N}/U_n=9k$ et on a aussi : $\exists k'\in\mathbb{N}/\alpha_n=4^{n+1}-1=3k'$

Donc : $U_{n+1}=4\times 9k+3\times 3k'=9(4k+k')=9k''$ avec $k''=4k+k'\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Exercice4 : (9,5pts) $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+3\text{pts}+1\text{pts}+2{,}5\text{pts})$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=3x-6\sqrt{x-1}+8$

1) a) Déterminer D_f

b) Démontrer que f admet une valeur minimale en 2 sur D_f

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\sqrt{x-1}$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Représenter (C_g) La courbe représentative de g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déterminer :

$g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$

c) Déterminer la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x\in[1;+\infty[$; $f(x)=(h\circ g)(x)$

d) Etudier les variations de f

Solution : 1) a) $f(x)=3x-6\sqrt{x-1}+8$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\ge 1\}=[1;+\infty[$

Par suite : $D_f=[1;+\infty[$

b) Démontrons que f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

C'est-à-dire : montrons $\forall x\in[1;+\infty[$; $f(x)\ge f(2)$

Soit $x\in[1;+\infty[$: $f(x)-f(2)=3x-6\sqrt{x-1}+8-8=3x-6\sqrt{x-1}=3(x-1-2\sqrt{x-1}+1)$

$f(x)-8=3(\sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x-1}+1^2)=3(\sqrt{x-1}-1)^2\ge 0$

Donc : $f(x)+4\ge 0$ par suite : $f(x)\ge -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\ge f(0)$

Donc : $\forall x\in[1;+\infty[$; $f(x)\ge f(2)$

Par suite : f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\sqrt{x-1}$

a) Dresser le tableau de variation de g

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\ge 1\}=[1;+\infty[$

g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	

b)

c) Déterminons : $g([1;2])$

$\rightarrow x\in[1;2]\Rightarrow 1\le x\le 2\Rightarrow g(1)\le g(x)\le g(2)$ car g est strictement croissante sur $[1;2]$

$\Rightarrow 0\le g(x)\le 1\Rightarrow g(x)\in[0;1]$

Donc : $g([1;2])\subset[0;1]$ (1)

→ Réciproquement

Soit $b\in[0;1]$: la droite d'équation : $y=b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[1;2]$

Donc : $\forall b\in[0;1]$; $\exists! x\in[1;2]/g(x)=b$

Donc : $[0;1]\subset g([1;2])$ (2)

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([1;2])=[0;1]$

d) Déterminons : $g([2;+\infty[)$

$\rightarrow x\in[2;+\infty[\Rightarrow x\ge 2\Rightarrow g(x)\ge g(2)$ car g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

$\Rightarrow g(x)\ge 1\Rightarrow g(x)\in[1;+\infty[$

Donc : $g([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ (1)

→ Réciproquement

Soit $b\in[1;+\infty[$: la droite d'équation : $y=b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[2;+\infty[$

Donc : $\forall b\in[1;+\infty[$; $\exists! x\in[2;+\infty[/g(x)=b$

Donc : $[1;+\infty[\subset g([2;+\infty[)$ (2)

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$

c) Déterminons la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x\in[1;+\infty[$; $f(x)=(h\circ g)(x)$

Soit $x\in[1;+\infty[$: on a : $f(x)-8=3(\sqrt{x-1}-1)^2$

Donc : $f(x)=3(\sqrt{x-1}-1)^2+8=3(g(x)-1)^2+8$

On pose : $h(x)=3(x-1)^2+8$

Donc : $f(x)=h(g(x))=(h\circ g)(x)$

Donc : $f=(h\circ g)$

d) Etudions les variations de f :

Dressons le tableau de variation de h :car $h(x)=3(x-1)^2+8$ polynôme du second degré

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	8	$\nearrow$	

On a : $f=(h\circ g)$

- Puisque g est strictement croissante sur $[1;2]$ et $g([1;2])=[0;1]$ et h est strictement décroissante sur $[0;1]$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement décroissante sur $[1;2]$
- Puisque g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ et $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$ et h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien