http://www.xriadiat.com **DS1: M** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $\{1pts+1pts+1pts\}$

Montrer par Le raisonnement par contre-exemple que les propositions suivantes sont fausses

1) P: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$ $x+\frac{1}{x}>2$ et 2) Q : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$ $2x-4y\neq 5$

3) R: $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$ $x-y=1\Rightarrow x>1$

Solution :1) P: $(\exists x\in\mathbb{R}^*)$ $x+\frac{1}{x}<2$ est vraie car : $(\exists x=-1\in\mathbb{R}^*)$ $-1+\frac{1}{-1}=-2<2$

Par suite : P: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$ $x+\frac{1}{x}\geq 2$ est fausse.

2) Q: $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$ $2x-4y=5$ par exemple on prend : $y=0$ et $x=\frac{5}{2}$: $2\times\frac{5}{2}-4\times 0=5$

Donc : $\overline{Q}$: est vraie Par suite : Q : est fausse.

3) $\overline{R}$: $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})$ $x-y=1$ et $x\leq 1$ par exemple on prend : $y=0$ et $x=1$: $x-1=1$ et $1\leq 1$

Donc : $\overline{R}$: est vraie Par suite : R : est fausse.

Exercice2 : (7.5pts) : (1.5pts x 5)

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}$ $x\neq y$ et $x+y\neq 1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}$

2) Montrer que $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$ $x^2+y^2=3\Rightarrow|x+y|\leq\sqrt{6}$

3) Montrer par l'absurde que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\frac{8x+2025}{10}\neq\mathbb{Z}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inequation suivante : $(\{\cdot\})$: $\sqrt{x+8}=x+1$

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Solution :1) Soient $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$. Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow(x=y$ ou $x+y=1)$

On a : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x^2-x+1=y^2-y+1$

$\Rightarrow x^2-y^2-(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-1)=0\Rightarrow x-y=0$ ou $x+y-1=0$

$\Rightarrow x=y$ ou $x+y=1$

Donc : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y$ ou $x+y=1$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq y$ et $x+y\neq 1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}$

2) Supposons que : $x^2+y^2=1$ Or on sait que $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$ $(x-y)^2\geq 0$

Donc : $x^2-2ab+b^2\geq 0$ et puisque : $x^2+b^2=1$ alors :

$1-2ab\geq 0$ Donc $2ab\leq 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\leq 2$ donc $(a+b)^2\leq 2$

Donc $\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{2}$ alors : $|a+b|\leq\sqrt{2}$

3) Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{Z}$, tel que : $\frac{8x+2025}{10}\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{Z}$,et $\exists n\in\mathbb{Z}$, tel que : $\frac{8x+2025}{10}=n$

$\frac{8x+2025}{10}=n\Leftrightarrow 8x+2025=10n\Leftrightarrow 2025=10n-8x\Leftrightarrow 2025=2(5n-4x)\Leftrightarrow 2025=2k$

avec $k=5m-4x\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 2025$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 2025 est impair

Ceci signifie : $\forall x\in\mathbb{N}$, $\sqrt{4x+2026}\neq\mathbb{N}$

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I) : $\sqrt{x+8}=x+1$

$D=\{x\in\mathbb{R}/x+8\geq 0\}=[-8;+\infty[$

$x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$

Soit $x\in[-1;+\infty[$ et I l'ensemble des solutions de (I)

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x+8}=x+1$

1 cas : si $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Donc : l'inéquation est vraie pour tout $x\in[-1;-1]$

Donc: $S_1=[-1;-1]$

2 cas : si $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$ alors $x+1\geq 0$

$\sqrt{x+8}=x+1\Leftrightarrow(\sqrt{x+8})^2=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+8=(x+2x+1)\Leftrightarrow 0=(x+2x+1)-8\Leftrightarrow 0=x^2+x-3=0$; $\Delta=1-4(-3)=13$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}=2.3$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}=-1.7$

$x^2+x-3=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ Donc $S_2=\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}\cap[-1;+\infty[=\left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

Donc: $S=S_1\cup S_2=[-8;-1]\cup\left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]=\left[-8;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

5) Notons P(n) La proposition

Nous allons demontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $\sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$ et $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$;

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n+1}{n+1}=\frac{n+1}{n+1}$??

On a : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Donc: $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$

Donc: $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n+1}{n+2}$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Exercice3 : (9pts)(1.5pts+1pts+1.5pts+1.5pts+1pts+1pts+1pts+1.5pts+0.5pts)

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+2}$ et $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

A) 1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : $A(-1;1)$ et $B(2;2)$ sont des points d'intersections de (C_f) et (C_g)

3) Déterminer les tableaux de variations de f et g

4) Tracer les courbes(C_f) et (C_g) dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations : $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}<0$ et $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$

B)1) Soit la fonction définie par : $h(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$

a) Déterminer D_h b) Montrer que : $h=f\circ g$

2) a) Déterminer graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{3}{4}\right]\right)$ et $g\left(\left[-\frac{3}{4};+\infty\right]\right)$

b) Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.

c) Déterminer la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{3}{4}\right]$

3) Montrer que : $h(x)=\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

Solution : A) 1) $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=[x\in\mathbb{R}/x\geq -2]=[-2;+\infty[$

2) $A(-1;1)$ et $B(2;2)$: $f(-1)=g(-1)=1\Rightarrow A(-1;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=g(2)=2\Rightarrow B(2;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

3)Determination des tableaux de variations de f et g :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

x	-2	$-1/2$	$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

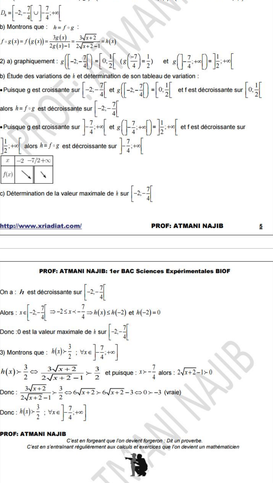
3) Tracage des courbes(C_f) et (C_g) dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

x	-2	-1	2	7
$g(x)$	0	1	2	3

b)(C_f) est l'hyperbole de centre $g\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{2}$

et $y=\frac{3}{2}$

4) Résolution graphique sur $\mathbb{R}$ des inéquations : $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}<0$ et $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$:



5)a) $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}<0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}<\frac{3x}{2x-1}\Leftrightarrow g(x)<f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au dessus de (C_g) si $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};2\right]$

Donc : $S=\left[-2;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};2\right]$

b) $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0\Leftrightarrow\frac{3x}{2x-1}\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 0$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses si $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$

Donc : $S=\left[0;\frac{1}{2}\right[$

B) 1) On pose : $h(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$ $D_h=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0$ et $2\sqrt{x+2}-1\neq 0\}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2$ et $\sqrt{x+2}\neq\frac{1}{2}\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2$ et $x+2\neq\frac{1}{4}\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\right.$ et $\left.x\neq-\frac{7}{4}\right\}$

$D_h=\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\cup\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

b) Montrons que : $h=f\circ g$:

$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{3g(x)}{2g(x)-1}=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}=h(x)$.

2) a) graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{3}{4}\right]\right)=\left[0;\frac{3}{2}\right]$, $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $g\left(\left[-\frac{7}{4};+\infty\right]\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Etude des variations de f et détermination de son tableau de variation :

• Puisque g est croissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right]$ et $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right]\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et f est décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$

alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right]$

• Puisque g est croissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et f est décroissante sur

$\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

x	-2	$-7/4$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

c) Détermination de la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right]$

On a : h est décroissant sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right]$

Alors : $x\in\left[-2;-\frac{7}{4}\right]\Rightarrow -2\leq x<-\frac{7}{4}\Rightarrow h(x)\leq h(-2)$ et $h(-2)=0$

Donc :0 est la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right]$

3) Montrons que : $h(x)=\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

$h(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}=\frac{3}{2}$ et puisque : $x>-\frac{7}{4}$ alors : $2\sqrt{x+2}-1>0$

Donc : $\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{x+2}=6\sqrt{x+2}-3\Leftrightarrow 0=-3$ (vraie)

Donc : $h(x)=\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron. Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien