http://www.xriadiat.com **DS1: L** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt})$

On considère la proposition suivante : $P:\ (\forall x\in\mathbb{R}): x<6 \Rightarrow x^2<36$

1) Ecrire la négation de P

2) En utilisant un raisonnement par contre-exemple, Montrer que P est fausse.

Solution :1) On a : $P:\ (\forall x\in\mathbb{R}): x<6 \Rightarrow x^2<36$ alors : $\overline{P}; (\exists x\in\mathbb{R}): x<6\ \ et\ \ x^2\geq 36$

Car : $\overline{P_1\Rightarrow P_2} \Leftrightarrow P_1\ et\ \overline{P_2}$

2) On a : $\overline{P}$ est vraie car $(\exists -7\in\mathbb{R}): -7<6\ \ et\ \ (-7)^2=49\geq 36$

Par suite : P est une proposition fausse. (-7 est le contre-exemple)

Exercice2 : (2 ,5pts) :

Montrer par disjonction des cas : que pour tout $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3.

Solution : Soit $n\in\mathbb{N}$: $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$

Il y'a trois façons d'écrire n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n=3k$: $n^3-n=3k(3k-1)(3k+1)=3\left(k(3k-1)(3k+1)\right)=3k'$ avec : $k'=k(3k-1)(3k+1)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n=3k+1$: $n^3-n=(3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1)$

$=(3k+1)(3k)(3k+2)=3\left(k(3k+1)(3k+2)\right)=3k'$ avec : $k'=k(3k+1)(3k+2)\in\mathbb{N}$

Donc : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas aussi

3ére cas : si $n=3k+2$

$n^3-n=(3k+2)(3k+2-1)(3k+2+1)=(3k+2)(3k+1)(3k+3)=3\left((k+1)(3k+1)(3k+2)\right)=3k'$

Avec : $k'=(k+1)(3k+1)(3k+2)\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : n^3-n est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par

Disjonction des cas le nombre n^3-n est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice3 : (2,5pts) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose a_n le nombre formé de n nombres égaux à 7

(C'est-à-dire : $a_n=\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}$ par exemple : $a_1=7$ et $a_2=77$; $a_4=7777$)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$.

Solution : Notons P(n) La proposition " $a_n=\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}=\frac{7}{9}(10^n-1)$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $a_1=7$ et $\frac{7}{9}(10^1-1)=7$ donc $7=7$.

Donc : P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $a_{n+1}=\frac{7}{9}(10^{n+1}-1)$??

On a : $a_{n+1}=7\times10^n+\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}=7\times10^n+a_n$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$

Donc $a_{n+1}=7\times10^n+\frac{7}{9}(10^n-1)=\frac{7}{9}(9\times10^n+10^n-1)=\frac{7}{9}(10\times10^n-1)=\frac{7}{9}(10^{n+1}-1)$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$.

Exercice4 : (3pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

1) Soit $a\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall\varepsilon\succ0: a\prec\varepsilon$

Montrer que : $a=0$

2) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\varepsilon\succ0: |a-b|\prec\varepsilon$

Montrer que : $a=b$

3) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

Montrer que : $a\leq b\Leftrightarrow\forall\varepsilon\succ0: a\prec b+\varepsilon$

Solution :1) Soit $a\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall\varepsilon\succ0: a\prec\varepsilon$

Montrons que : $a=0$

Supposons : $a\neq0$ et comme : $a\in\mathbb{R}^+$ alors : $a\succ0$

et puisque : $\forall\varepsilon\succ0: a\prec\varepsilon$ on prend : $\varepsilon=a\succ0$ on aura donc : $a\prec a$ contradiction

Donc : $a=0$

2) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\varepsilon\succ0: |a-b|\prec\varepsilon$: Montrons que : $a=b$

Supposons : $a\neq b$ alors : $|a-b|\succ0$

et puisque : $\forall\varepsilon\succ0: |a-b|\prec\varepsilon$ on prend : $\varepsilon=|a-b|\succ0$ on aura donc : $|a-b|\prec|a-b|$

contradiction et donc : $a=b$

3) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$) Montrons que : $a\leq b\Rightarrow\forall\varepsilon\succ0: a\prec b+\varepsilon$?

Supposons : $a\leq b$ et Supposons $\exists\varepsilon\succ0 / a\geq b+\varepsilon$

Alors : $\exists\varepsilon\succ0 / a-b\geq\varepsilon\succ0$

Alors : $a-b\succ0$ c'est-à-dire : $a\succ b$ contradiction avec $a\leq b$

Donc : $a\leq b\Rightarrow\forall\varepsilon\succ0: a\prec b+\varepsilon$

$\Leftarrow$) Montrons que : $\forall\varepsilon\succ0: a\prec b+\varepsilon\Rightarrow a\leq b$?

$\forall\varepsilon\succ0: a\prec b+\varepsilon\Rightarrow\forall\varepsilon\succ0: a-b\prec\varepsilon$

Supposons $a-b\succ0$ on prend : $\varepsilon=a-b\succ0$ et puisque : $\forall\varepsilon\succ0: a-b\prec\varepsilon$ alors $a-b\prec a-b$ contradiction.

$\forall\varepsilon\succ0: a\prec b+\varepsilon\Rightarrow a\leq b$

Conclusion : $a\leq b\Leftrightarrow\forall\varepsilon\succ0: a\prec b+\varepsilon$

Exercice5 : (10pts) : $(1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Soient f et g deux fonctions numériques définies par : $f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\sqrt{x}$

1) Dresser les tableaux de variations de f et g

2) Soit : h la fonction numérique définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminer D_h

b) Etudier les variations de h sur $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ et $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

c) Montrer que h admet un minimum absolu au point d'abscisse $\frac{1}{4}$

3) Soit : k la fonction numérique définie par : $k(x)=(g\circ f)(x)$

a) Déterminer D_k

b) Etudier les variations de k

c) Calculer $k(x)=(g\circ f)(x)$; $\forall x\in D_k$

4)a) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

b) Résoudre graphiquement sur $[0;+\infty[$ l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}\leq1$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 2 points d'abscisse : 0 et $1{,}75$

Solution : 1) Dressons les tableaux de variations de f et g

a) $f(x)=x^2-x$; $D_f=\mathbb{R}$: On a $a=1>0$; $b=-1$ et $c=0$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$ et $\left(f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

b) $g(x)=\sqrt{x}$; $D_g=[0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$

1)Soit : h la fonction numérique définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminons D_h

$D_h=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_g\ \ et\ g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} / x\geq0\ \ et\ g(x)\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R} / x\geq0\}=[0;+\infty[$

b) →Etudions les variations de h sur : $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

Puisque g est croissante sur $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

et $g\left(\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et f est décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

→Etudions les variations de h sur : $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Puisque g est croissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

et $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et f est croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $h=f\circ g$ est croissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

c) Montrons que h admet un minimum absolu au point d'abscisse $\frac{1}{4}$

C'est-à-dire Montrons que : $h(x)\leq h\left(\frac{1}{4}\right)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

$h\left(\frac{1}{4}\right)=(f\circ g)\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

Le tableau de variations de h :

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

D'après le tableau de variations : h admet un minimum absolu au point d'abscisse $\frac{1}{4}$

C'est-à-dire on a $h(x)\geq h\left(\frac{1}{4}\right)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

Donc : $h(x)\geq-\frac{1}{4}$; $\forall x\in[0;+\infty[$

3) Soit : k la fonction numérique définie par : $k(x)=(g\circ f)(x)$

a) Déterminons D_k : $D_k=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f\ \ et\ f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} / x\in\mathbb{R}\ \ et\ f(x)\geq0\}$

$f(x)\geq0\Leftrightarrow x^2-x\geq0\Leftrightarrow x(x-1)\geq0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_k=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

b) Etudions les variations de k : $k(x)=(g\circ f)(x)$

→Etudions les variations de k sur : $]-\infty;0]$

Puisque f est décroissante sur $]-\infty;0]$

et $f(]-\infty;0])=[0,+\infty[$ et g est croissante sur $[0,+\infty[$ alors $k=g\circ f$ est décroissante sur $]-\infty;0]$

→Etudions les variations de k sur : $[1;+\infty[$

Puisque f est croissante sur $[1;+\infty[$

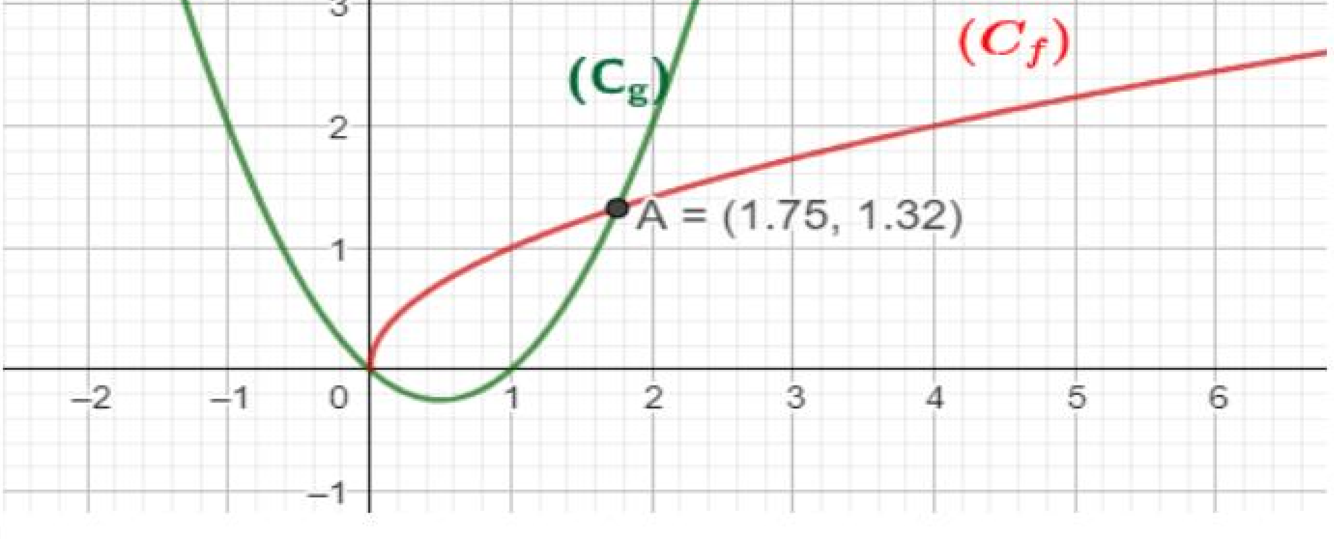
et $f([1;+\infty[)=[0;+\infty[$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $k=g\circ f$ est croissante sur $[1;+\infty[$

c) Calculons : $k(x)=(g\circ f)(x)$; $\forall x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

Soit $x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$: $k(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-x}$

Donc : $k(x)=\sqrt{x^2-x}$; $\forall x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

4)a) Traçage des courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère



b) Résolution graphique de l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}\leq1$

$D_E=\{x\in\mathbb{R} / x\in[0;+\infty[\ \ et\ x^2-x\neq0\}=\{x\in\mathbb{R} / x\in[0;+\infty[\ \ et\ x\neq0\ \ et\ x\neq1\}=]0;1[\cup]1;+\infty[$

Dans : $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f(x)>0$

$\frac{g(x)}{f(x)}\leq1\Leftrightarrow g(x)\leq f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]0\ ;\ 1{,}75]$

Finalement : $S=]0\ ;\ 1{,}75]$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien