http://www.xriadiat.com **DS1: K** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et donner la négation des 4 premiers propositions : 1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}); x-y=2024$

2) $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty;2[); 3x^2y-x+2y=0$

5) $P_3 : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2y+4xy+1=0$

Solution : 1) Soit $x \in \mathbb{Z}$existe-t-il y dans $\mathbb{Z}$ tel que : $x-y=2024$?

On a : $x-y=2024 \Leftrightarrow y=x-2024 \in \mathbb{Z}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y = x-2024 \in \mathbb{Z}); x-y=2024$

Donc : la proposition P_1 : est vraie et $\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}); x-y \neq 2024$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$; existe-t-il y dans $]-\infty;2[$ tel que : $3x^2y-x+2y=0$?

$3x^2y-x+2y=0 \Leftrightarrow y(3x^2+2)=x \Leftrightarrow y=\frac{x}{3x^2+2}$

Il reste à montrer que : $y \in]-\infty;2[$

$y-2=\frac{x}{3x^2+2}-2=\frac{x-6x^2-4}{3x^2+2}=-\frac{6x^2-x+4}{3x^2+2}$

On a : $6x^2-x+4 \succ 0$ car $\Delta=-47 \prec 0$ et $a=6 \succ 0$et on a : $3x^2+2 \succ 0$

Donc : $y-2 \prec 0$ c'est-a-dire : $y \prec 2$

Par suite : la proposition P_2 : est vraie et $\overline{P_2} : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in]-\infty;2[); 3x^2y-x+2y \neq 0$

3) $P_3 : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2y+4xy+1=0$

Si on prend : $y=1$: on retrouve la proposition : $(\exists! x \in [-1;0]) : x^2+4x+1=0$?

$\Delta=16-4=12 \succ 0$: $x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{2}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3} \approx -0{,}26 \in [-1;0]$ et $x_2=\frac{-4+\sqrt{12}}{2}=-2-\sqrt{3} \notin [-1;0]$

Par suite : $(\exists! x \in [-1;0]) : x^2+4x+1=0$ est vraie

Conclusion : $P_3 : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2y+4xy+1=0$ est vraie

Exercice2 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[)(\forall y \in [1;+\infty[) : \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$

2)Soit : $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$; Montrer que : le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$: (S) :

$$\begin{cases} 2x-3z \succ 3 \\ 3y-2x \geq 3 \\ y-z \leq 2 \end{cases}$$

Solution : 1) Soit : $(x;y) \in ([1;+\infty[)^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2 \leq \sqrt{xy}^2$

$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1 \leq xy \Leftrightarrow x-1+2\sqrt{xy-x-y+1}+y-1 \leq xy$

$\Leftrightarrow 0 \leq xy-x-y+1-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{xy-x-y+1}^2-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy-x-y+1}-1\right)^2 \geq 0$ est une proposition vraie

Donc : $(\forall x \in [1;+\infty[)(\forall y \in [1;+\infty[) : \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$

2) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : le système (S) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^2$: Donc : $\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} 2x-3z \succ 3 \\ 3y-2x \geq 3 \\ y-z \leq 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-3z \succ 3 & (1) \\ 3y-2x \geq 3 & (2) \\ y-z \leq 2 \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3y-3z \succ 6 \\ y-z \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z \succ 2 \\ y-z \leq 2 \end{cases} \Rightarrow 2 \prec y-z \leq 2 \Rightarrow 2 \prec 2$$: Ce qui est contradictoire

Donc : le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$

Exercice3 : (4,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+3\text{pts})$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $f(1)=0$et $f(n+1)=\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(n) \neq 1$

2)On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $g(n)=\frac{f(n)+1}{f(n)-1}$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1)-g(n)=3$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $g(n)=3n-2$

c) Déterminer : $f(n)$en fonction de n ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Solution : 1) Montrons par récurrence que : $P(n)$ « $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(n) \neq 1$ »

1étapes : l'initialisation : Pour n = 1 nous avons : $f(1)=0 \neq 1$

Donc $P(1)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n) \neq 1$

Montrons que : $f(n+1) \neq 1$ "??

On a : $f(n+1)-1=\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}-1=\frac{5f(n)-3-3f(n)+1}{3f(n)-1}=\frac{2f(n)-2}{3f(n)-1}=\frac{2(f(n)-1)}{3f(n)-1}$

et puisque : $f(n) \neq 1$ alors : $f(n)-1 \neq 0$ et $f(n+1)-1 \neq 0$ par suite : $f(n+1) \neq 1$

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : « $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(n) \neq 1$ »

2)On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $g(n)=\frac{f(n)+1}{f(n)-1}$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1)-g(n)=3$

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(n+1)-g(n)=\frac{f(n+1)+1}{f(n+1)-1}-g(n)=\frac{\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}+1}{\frac{5f(n)-3}{3f(n)-1}-1}-g(n)=\frac{\frac{5f(n)-3+3f(n)-1}{3f(n)-1}}{\frac{5f(n)-3-3f(n)+1}{3f(n)-1}}-\frac{f(n)+1}{f(n)-1}$$

$$g(n+1)-g(n)=\frac{\frac{8f(n)-4}{3f(n)-1}}{\frac{2f(n)-2}{3f(n)-1}}-\frac{f(n)+1}{f(n)-1}=\frac{8f(n)-4}{2(f(n)-1)}-\frac{f(n)+1}{f(n)-1}=\frac{8f(n)-4-2f(n)-2}{2(f(n)-1)}=\frac{6(f(n)-3)}{2(f(n)-1)}=3$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1)-g(n)=3$

b) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $g(n)=3n-2$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1)-g(n)=3$

(1) Pour : $n=1$; $g(2)-g(1)=3$

(2) Pour : $n=2$; $g(3)-g(2)=3$

...

...

$(n-2)$ Pour : $n-2$; $g(n-1)-g(n-2)=3$

$(n-1)$ Pour : $n-1$; $g(n)-g(n-1)=3$

La des égalités membre a membre donne : $g(n)-g(1)=\underbrace{3+3+3+...+3}_{n-1\ fois}=3(n-1)$

Donc : $g(n)=3(n-1)-g(1)$ et $g(1)=\frac{f(1)+1}{f(1)-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$

Donc : $g(n)=3(n-1)+1=3n-3+1=3n-2$

2)On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $g(n)=\frac{f(n)+1}{f(n)-1} \Leftrightarrow g(n)(f(n)-1)=f(n)+1 \Leftrightarrow g(n)f(n)-g(n)=f(n)+1$

$\Leftrightarrow f(n)(g(n)-1)=1+g(n)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n)-1 \neq 0$ car si : $\exists n \in \mathbb{N}^* : g(n)-1=0$

$g(n)=1 \Leftrightarrow \frac{f(n)+1}{f(n)-1}=1 \Leftrightarrow f(n)+1=f(n)-1 \Leftrightarrow 1=-1$ (Absurde)

$f(n)=\frac{1+g(n)}{g(n)-1}=\frac{1+3n-2}{3n-2-1}=\boxed{\frac{3n-1}{3n-3}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice4 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) Déterminer D_f 2) Montrer que $\frac{2}{3}$ est le minimum de f sur D_f.

3) Montrer que 2 est le maximum de f sur D_f.

Solution :1) $D_f=\{x \in \mathbb{R} / x^2+x+1 \neq 0\}$

$x^2+x+1=0$: $\Delta<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) il s'agit de montrer que : $\frac{2}{3} \leq f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$ et que l'équation : $f(x)=\frac{2}{3}$

Admet une solution dans D_f

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x)-\frac{2}{3}=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}=\frac{3x^2+3-2x^2-2x-2}{3(x^2+x+1)}=\frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}=\frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$

Or : $x^2+x+1>0$ car $\Delta<0$ et $a=1>0$ et on a aussi : $(x-1)^2 \geq 0$

Donc ; $f(x)-\frac{2}{3} \geq 0$ par suite : $\frac{2}{3} \leq f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Par suite : $f(1) \leq f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Conclusion : $f(1)=\frac{2}{3}$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

2) il s'agit de montrer que : $f(x) \leq 2$; $\forall x \in \mathbb{R}$; et que l'équation : $f(x)=2$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x)-2=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-2=\frac{x^2+1-2x^2-2x-2}{x^2+x+1}=\frac{-x^2-2x-1}{3(x^2+x+1)}=\frac{-(x+1)^2}{x^2+x+1} \leq 0$

Or : $x^2+x+1>0$ car $\Delta<0$ et $a=1>0$ et on a aussi : $-(x+1)^2 \leq 0$

Donc ; $f(x)-2 \leq 0$ par suite : $f(x) \leq 2$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)-2=0 \Leftrightarrow \frac{-(x+1)^2}{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow -(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Conclusion : $f(-1)=2$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice5 : (6,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts})$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x-2\sqrt{x-2}+1$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que : $f(x) \geq 2$; $\forall x \in [2;+\infty[$

3) Soit : $h(x)=\sqrt{x-2}$ a) Dresser le tableau de variation de h

b) Déterminer graphiquement : $h([2;3])$; $h([3;+\infty[)$

4) a) Déterminer une fonction polynôme de degré 2 ; tel que : $f(x)=g \circ h(x)$; $\forall x \in [2;+\infty[$

b) En déduire les variations de f

c) Déterminer le tableau de variation de $\frac{1}{f}$

Solution :1) $D_f=\{x \in \mathbb{R} / x-2 \geq 0\}=[2;+\infty[$

2) $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x-2}+1 \geq 2 \Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 4\left(\sqrt{x-2}\right)^2$ car

$x \in [2;+\infty[$ donc : $x \in [1;+\infty[$ et donc : $x-1 \geq 0$

$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 4(x-2) \Leftrightarrow x^2-6x+9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$ (Vraie)

Donc : par équivalence on a : $f(x) \geq 2$; $\forall x \in [2;+\infty[$

3) Soit : $h(x)=\sqrt{x-2}$

a) le tableau de variation de h :

x	2	$+\infty$
h	0 ↗	$+\infty$

b) Déterminons : $h([2;3])$; $h([3;+\infty[)$

$h([2;3])=[0;1]$ et $h([3;+\infty[)=[1;+\infty[$

4) a) Déterminons une fonction polynôme de degré 2 ; tel que : $f(x)=g \circ h(x)$; $\forall x \in [2;+\infty[$

$f(x)=x-2\sqrt{x-2}+1=x-2-2\sqrt{x-2}+3=\left(\sqrt{x-2}\right)^2-2\sqrt{x-2}+3=(h(x))^2-2h(x)+3$

On pose : $g(x)=x^2-2x+3$

Donc : $f(x)=g(h(x))$

Donc : $f(x)=g \circ h(x)$; $\forall x \in [2;+\infty[$ avec : $g(x)=x^2-2x+3$

b) Déduction des variations de $f=g \circ h$:

On a : $g(x)=x^2-2x+3$ le tableau de variation de g est:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	2	↗

• Puisque h est décroissante sur $[2;3]$ et $h([2;3])=[0;1]$ et g est décroissante sur $[0;1]$ alors $f=g \circ h$ est décroissante sur $[2;3]$

• Puisque h est croissante sur $[3;+\infty[$ et $h([3;+\infty[)=[1;+\infty[$ et g est croissante sur $[1;+\infty[$ alors $f=g \circ h$ est croissante sur $[3;+\infty[$

c) Déterminons le tableau de variation de $\frac{1}{f}$:

• $\forall a \in [2;3]$ et $\forall b \in [2;3]$

$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{f(a)} \leq \frac{1}{f(b)}$

Alors $\frac{1}{f}$ est croissante sur $[2;3]$

• $\forall a \in [3;+\infty[$ et $\forall b \in [3;+\infty[$

$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow \frac{1}{f(a)} \geq \frac{1}{f(b)}$

Alors : $\frac{1}{f}$ est décroissante sur $[3;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien