http://www.xriadiat.com **DS1: J** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (5,5pts) : $(1\text{pts}\times 2+2\text{pts}+1{,}5\text{pts})$ On considère les assertions suivantes :

P :" $(\forall x\in]0;+\infty[):\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$ " R :" $(\forall x\in [1;+\infty[):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$ " ;

E :" $(\exists x\in \mathbb{R}_+^*):(x^2\prec x)\ ou\ \left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$ "

F :" $(\exists x\in \mathbb{R}_+^*):(x^2\prec x)\ ou\ \left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$ " F :" $(\forall n\in \mathbb{N}^*):n\ne 1\Rightarrow n\ge 2$ "

1) Montrer que $P\ et\ R$ sont vraies (avec un raisonnement logique)

2) Donner : $\overline{P}\ ;\overline{R}\ ;\overline{E}\ et\ \overline{F}$

3) Déterminer la valeur de vérité de $E\ et\ F$ (justifier)

Solution :1) a) Soit : $x\in]0;+\infty[$: Montrons que : $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$

$\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}\le 2+x\Leftrightarrow 0\le 1+x-2\sqrt{1+x}+1$

$\Leftrightarrow 0\le \sqrt{1+x}^2-2\sqrt{1+x}+1^2\Leftrightarrow 0\le \left(\sqrt{1+x}-1\right)^2$

Donc : $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 0\le \left(\sqrt{1+x}-1\right)^2$ (vraie)

P :" $(\forall x\in]0;+\infty[):\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$ " est vraie

b) Soit : $x\in [1;+\infty[$; Montrons que : : $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$ "

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}}\ge 2\Leftrightarrow \sqrt{x}^2+1\ge 2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}^2-2\sqrt{x}+1^2\ge 0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$ est vraie

Par suite : R :" $(\forall x\in [1;+\infty[):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$ " est vraie

2) P :" $(\forall x\in]0;+\infty[):\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$ " $\overline{P}$:" $(\exists x\in]0;+\infty[):\sqrt{1+x}\succ 1+\frac{x}{2}$ "

R :" $(\forall x\in [1;+\infty[):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$ " Donc : $\overline{R}$:" $(\exists x\in [1;+\infty[):\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\prec 2$ "

$\overline{E}:(\forall x\in \mathbb{R}_+^*):\left[(x^2\ge x)\ et\ \left(x+\frac{1}{x}\ge 0\right)\right]$

$\overline{F}:(\exists n\in \mathbb{N}^*):n\ne 1\ et\ n\prec 2$

3) a) $\overline{E}:(\forall x\in \mathbb{R}_+^*):\left[(x^2\ge x)\ et\ \left(x+\frac{1}{x}\ge 0\right)\right]$ est fausse : car $(\forall x\in \mathbb{R}_+^*):(x^2\ge x)$ est fausse :

En effet : $\left(\exists x=\frac{1}{2}\in \mathbb{R}_+^*\right)$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec \frac{1}{2}$ Par suite : E :est vraie

b) $F:(\forall n\in \mathbb{N}^*):n\ne 1\Rightarrow n\ge 2$ et $\overline{F}:(\exists n\in \mathbb{N}^*):n\ne 1\ et\ n\prec 2$: $\overline{F}$:est Faux

Par suite : F :est vraie

Exercice2 : (3 pts) : $(2\text{pts}+1\text{pts})$

1) Montrer que : $\forall x\in \mathbb{R}$; $\forall y\in \mathbb{R}$: $x\ne 0\ \ ou\ \ y\ne 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\ne 0$

2)Montrer que : $\forall x\in \mathbb{R}$; $\forall y\in \mathbb{R}$; $\forall z\in \mathbb{R}$: $x+y\succ z\Rightarrow x\succ \frac{z}{2}$ ou $y\succ \frac{z}{2}$

Solution : 1) Montrons l'implication en raisonnant par contraposition :

Soit $(x;y)\in \mathbb{R}^2$: Montrons que : $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow x=0\ \ et\ \ y=0$

Supposons : $x^2+y^2+xy=0$ et Montrons que : $x=y=0$

On a : $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy+xy=xy\\ x^2+y^2+xy-xy=-xy\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2xy=xy\\ x^2+y^2=-xy\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2=xy\\ x^2+y^2=-xy\end{cases}$

Or : $(x+y)^2\ge 0$ et $x^2+y^2\ge 0$

Donc : $xy\ge 0\ \ et\ \ xy\le 0$ par suite : $xy=0$

Donc : $x^2+y^2=0$ Donc : $x^2=-y^2$ Or : $x^2\ge 0$ et puisque $x^2=-y^2$ on a aussi : $x^2\le 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2\ge 0\\ x^2\le 0\end{cases}\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$ et comme : $x^2+y^2=0$ alors : $y^2=0$ c'est-à-dire : $y=0$

D'où : $\forall x\in \mathbb{R};\forall y\in \mathbb{R}$: $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow x=y=0$

Finalement : $\forall x\in \mathbb{R};\forall y\in \mathbb{R}$: $x^2+y^2+xy=0\Leftrightarrow x=y=0$

Finalement : par contraposition : $\forall x\in \mathbb{R};\forall y\in \mathbb{R}$: $x\ne 0\ \ ou\ \ y\ne 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\ne 0$

2)Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x+y\succ z$ et $x\le \frac{z}{2}$ et $y\succ \frac{z}{2}$

$\begin{cases} x\le \frac{z}{2}\\ y\le \frac{z}{2}\end{cases}\Rightarrow x+y\le \frac{z}{2}+\frac{z}{2}\Rightarrow x+y\le z$ Ce qui est contradictoire avec : $x+y\succ z$

Donc : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ \frac{z}{2}$ ou $y\succ \frac{z}{2}$

Exercice3 : (1,5pts) : Montrer que : $\forall n\in \mathbb{N}$: $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :

$3\times 5^{2\times 0+1}+2^{3\times 0+1}=3\times 5+2^1=15+2=17$ et 17est un multiple de 17 ; Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in \mathbb{N}\ /\ 3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in \mathbb{N}\ /\ 3\times 5^{2n+3}+2^{3n+4}=7k'$??

$$\begin{aligned} 3\times 5^{2n+3}+2^{3n+4} &= 3\times 5^2\times 5^{2n+1}+2^3\times 2^{3n+1}=3(17+8)\times 5^{2n+1}+8\times 2^{3n+1}\\ &= 3\times 17\times 5^{2n+1}+3\times 8\times 5^{2n+1}+8\times 2^{3n+1}\\ &= 3\times 17\times 5^{2n+1}+8\left(3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\right)=3\times 17\times 5^{2n+1}+8\times 17k\\ &= 17\times\left(3\times 5^{2n+1}+8k\right)=17k' \quad \text{avec : } k'=3\times 5^{2n+1}+8k\in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in \mathbb{N}$: $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Exercice4 : (10pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+2{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

1) a) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=2+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)$: $\forall x\in D_f$

a) Étudier la monotonie de f dans les intervalles suivants : $]-\infty;1[$; $\left]1;\frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

1) ä) Soit : $x\in \mathbb{R}-\{1\}$:On a $f(x)=\frac{2(x^2-2x+1)+4x^2+12x+9}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=\frac{2(x^2-2x+1)+4x^2+12x+9}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2+(2x-3)^2}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2}+\frac{(2x-3)^2}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=2+\frac{(2x-3)^2}{(x-1)^2}=2+\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2$ avec : $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$; $\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$

b) Déduisons que : f est minorée sur D_f : Soit : $x\in \mathbb{R}-\{1\}$: Montrons que : $2\le f(x)$

Puisque : $f(x)=2+\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2$ alors : $f(x)-2=\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2\ge 0\ \forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$

Donc : $2\le f(x)$; $\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$

Par suite f est minorée sur $x\in \mathbb{R}-\{1\}$

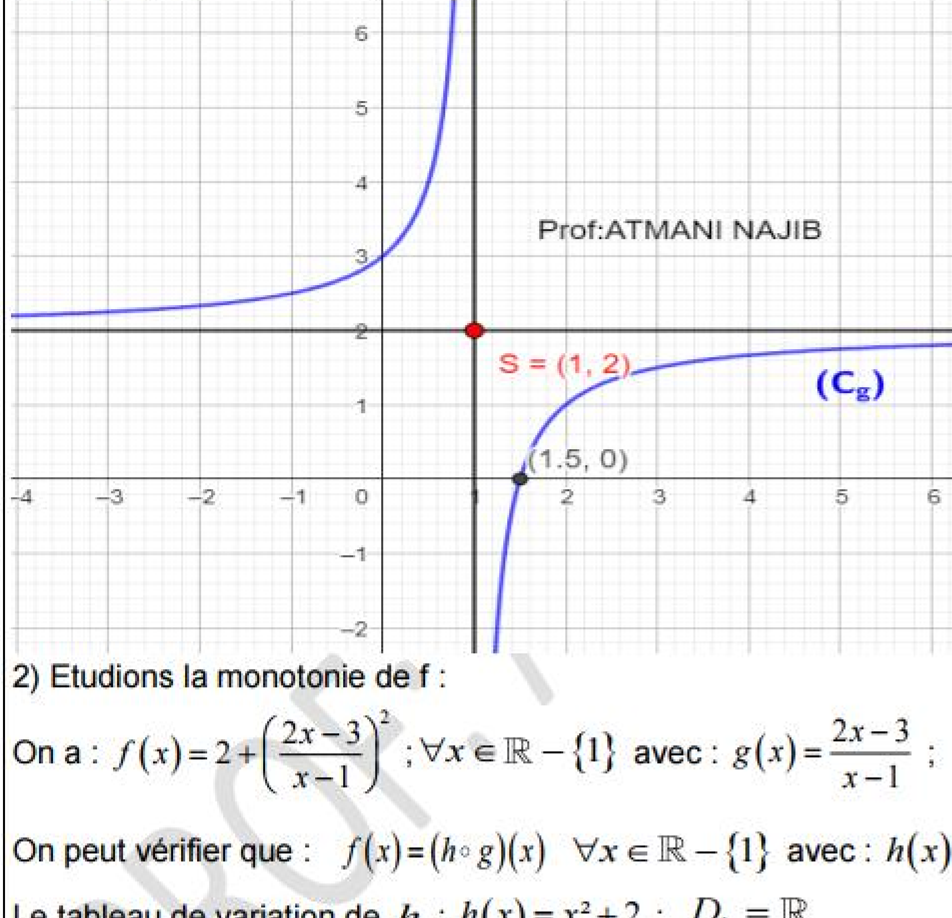
c) Comme : $f(x)-2=0\Leftrightarrow \left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Alors : $f\left(\frac{3}{2}\right)=2$ et donc : $f\left(\frac{3}{2}\right)\le f(x)$; $\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$

Donc : f admet-elle un minimum absolu c'est 2 en $\frac{3}{2}$

d) $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$; $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$: $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2+3=1>0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $S(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$.



2) Etudions la monotonie de f :

On a : $f(x)=2+\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2$; $\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$ avec : $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$;

On peut vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)\ \ \forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$ avec : $h(x)=2+x^2$

Le tableau de variation de h : $h(x)=x^2+2$; $D_h=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=0$ et $c=2$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$: $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\times 1}=0$ Et $\beta=h(0)=2$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_h) c'est une parabole de sommet $W(0;2)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

→Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $]-\infty;1[$

Puisque g est croissante sur $]-\infty;1[$ et $\forall x\in]-\infty;1[:g(x)\in]2;+\infty[$ (voir (C_g)) et h est croissante sur $]2;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $]-\infty;1[$

→ Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left]1;\frac{3}{2}\right]$

Puisque g est croissante sur $\left]1;\frac{3}{2}\right]$ et $\forall x\in \left]1;\frac{3}{2}\right]:g(x)\in]-\infty;0]$ (voir (C_g)) et h est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]1;\frac{3}{2}\right]$

→ Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Puisque g est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $\forall x\in \left[\frac{3}{2};+\infty\right[:g(x)\in [0;+\infty[$ (voir (C_g)) et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

c) le tableau de variation de f et les extrémums de la fonction f

→le tableau de variation de f

x	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$

→Le nombre 1 est le minimum relatif de f en $\frac{3}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien