http://www.xriadiat.com **DS1: I** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1\text{pts}\times 3)$

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes (justifier les réponses)

1) $P:\ (\exists y\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R}): x^2\geq 10y$

2) $Q:\ (\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x+y\succ 2$

3) $R:\ (\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x^2+y\leq xy$

Solution : 1) $P:\ (\exists y\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R}): x^2\geq 10y$

Il suffit de prendre : $y=0$ donc : $(\exists y=0\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R}): x^2\geq 10\times 0$

Donc : P: est une proposition vraie

$\overline{P}:\ (\forall y\in\mathbb{R});(\exists x\in\mathbb{R}): x^2\prec 10y$

2) $Q:\ (\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x+y\succ 2$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $x+y\succ 2$ signifie que : $y\succ 2-x$

Il suffit de prendre : $y=-x+3$

On a alors : $x+y=x+-x+3=3\succ 2$

Donc : Q est une proposition vraie

$\overline{Q}:\ (\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})/x+y\leq 2$

3) $R:\ (\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x^2+y\leq xy$

$\overline{R}:\ (\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})/x^2+y\succ xy$

On prend : $x=1$ on a donc : $(\forall y\in\mathbb{R})/1+y\succ y$ (vraie)

Donc : $\overline{R}$: est une proposition vraie par suite : R: est une proposition fausse.

Exercice2 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}\times 2)$

1) Démontrer en utilisant la contraposée que : $\forall x\in\mathbb{R};(x+x^3\leq 2\Rightarrow x\leq 1)$

2) Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

Montrer par l'absurde que : $x\leq\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{y}\leq\sqrt{2}$ ou $y+\frac{1}{x}\leq\sqrt{2}$

Solution : Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

$\forall x\in\mathbb{R};(x+x^3\leq 2\Rightarrow x\leq 1)$

Soit : $x\in\mathbb{R}$; Par contraposée Montrons que : $(x\succ 1\Rightarrow x+x^3\succ 2)$

Supposons que : $x\succ 1$ alors : $x^3\succ 1^3$ c'est-à-dire : $x\succ 1$ et $x^3\succ 1\Rightarrow x+x^3\succ 1+1\Rightarrow x+x^3\succ 2$

Donc : $(x\succ 1\Rightarrow x+x^3\succ 2)$

Par contraposée on a donc : $\forall x\in\mathbb{R};(x+x^3\leq 2\Rightarrow x\leq 1)$

2) Soient : $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $y\in\mathbb{R}_+^*$

Supposons par l'absurde que : $x>\sqrt{2}$ et $\frac{1}{y}>\sqrt{2}$ et $y+\frac{1}{x}>\sqrt{2}$

$x>\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{x}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ❶ et $\frac{1}{y}>\sqrt{2}\Rightarrow y<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ❷

la somme ❶ et ❷ membre a membre donne : $y+\frac{1}{x}<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Donc : $y+\frac{1}{x}<\sqrt{2}$ contradiction avec : $y+\frac{1}{x}>\sqrt{2}$

Donc : $x\leq\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{y}\leq\sqrt{2}$ ou $y+\frac{1}{x}\leq\sqrt{2}$

Exercice3 : (2pts)

Montrer que : « $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3 »

Solution : Montrons P_6 : « $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3 » est vraie ?

Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\exists k\in\mathbb{N}\ /\ n^3-n=3k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3-0=0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\ /\ n^3-n=3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(n^3-n)+3n^2+3n=3k+3(n^2+n)=3(k+n^2+n)=3k'$

Avec $k'=k+n^2+n\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : P_6 : « $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3 » est vraie

$\overline{P_6}$: « $\exists n\in\mathbb{N}$; n^3-n n'est pas divisible par 3 »

Exercice4 : (1,5pts) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$

Solution : $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$: a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$

$x-2=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{2\}$

b) Résolvons l'équation : étudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

On va Opérer par disjonction de cas :

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ par suite : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{(x-2)}=2\Leftrightarrow x(x+2)=2$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1+2=3\succ 0$

Comme $\Delta'>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{3}$ et

$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{3}$

Tous les deux ne sont pas supérieurs à 2 donc : $S_1=\varnothing$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\prec 0$ donc : $|x-2|=-x+2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{-(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=-2$ c'est-à-dire : $x^2+2x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-2=-1\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions

Donc : $S_2=\varnothing$ Par suite : $S=S_1\cup S_2=\varnothing$

Exercice5 : (2pts) : $(1\text{pts}\times 2)$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=\frac{x-x^2}{x^2+1}$

1) Montrer que : $\frac{|x|}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$

2) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}-\frac{|x|}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2|x|}{2(x^2+1)}=\frac{|x|^2-2|x|+1}{2(x^2+1)}=\frac{(|x|-1)^2}{2(x^2+1)}\geq 0$$

Ainsi : $\frac{|x|}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2) Démontrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $f(x)=\frac{x-x^2}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}$

Or : $0\leq x^2<x^2+1$ donc : $0\leq\frac{x^2}{x^2+1}<1$ d'où : $-1<\frac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$ (1)

On a : $\frac{|x|}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $-\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$ (2)

De : (1) et (2) on déduit que : $-\frac{3}{2}<\frac{x}{x^2+1}-\frac{x^2}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$

Ainsi : $-\frac{3}{2}<f(x)\leq\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : f est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice6 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}\times 2)$

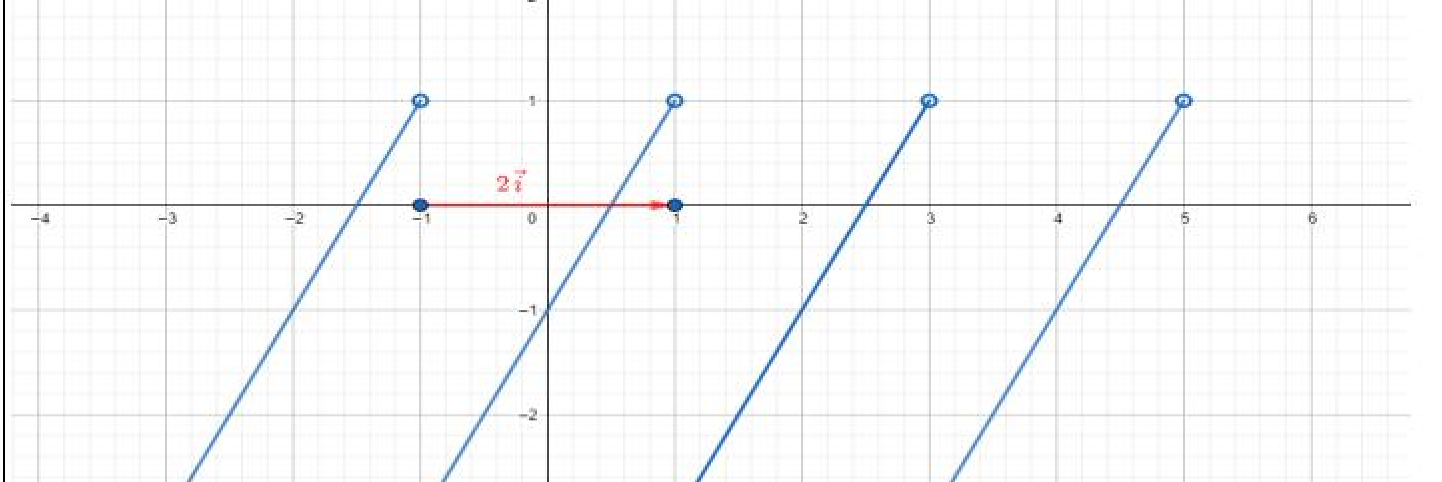
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

Tel que : $f(x)=2x-1\quad\forall x\in[-1;1[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;5[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(2026)$

Solution :1) la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;5[$ est :



2) Calculons : $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(2026)$

On a : $f(x)=2x-1\quad\forall x\in[-1;1[$

$\rightarrow -1\in[-1;1[$ Donc : $f(-1)=2(-1)-1=-3$

$\rightarrow 0\in[-1;1[$ Donc : $f(0)=2\times 0-1=--1$

$\rightarrow\frac{1}{2}\in[-1;1[$ Donc : $f(0)=2\times\frac{1}{2}-1=1-1=0$

$\rightarrow 1\notin[-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(1)=f(-1+2)=f(-1)=-3$ car f est 2 périodique

$\rightarrow 2\notin[-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(2)=f(0+2)=f(0)=-1$ car f est 2 périodique

$\rightarrow 2026\notin[-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(2026)=f(0+2\times 1013)=f(0)=-1$

Car f est périodique de période $T=2$ et aussi $T'=1013\times 2$ est une période

Exercice7: (5,5pts) : $(2{,}5\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt})$

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

1) Démontrer que f est majorée par 2 et minorée par $-\frac{1}{2}$

2) On pose : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $u(x)=\sqrt{x}$

a) Déterminer la fonction v telle que : $f=v\circ u$

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

Solution :1) $D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\leq 2$ et $-\frac{1}{2}\leq f(x)$ dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-2=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-2=\frac{-5}{\sqrt{x}+2}\prec 0$

Donc : $f(x)<2$ dans $\mathbb{R}^+$

Donc : f est majorée par 2

$f(x)+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\geq 0$

Donc : $-\frac{1}{2}\leq f(x)$ dans $\mathbb{R}^+$

Donc : f est minorée par $-\frac{1}{2}$

2)a) Déterminer la fonction v telle que : $f=v\circ u$

On a : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=\frac{2u(x)-1}{u(x)+2}$; on pose $v(x)=\frac{2x-1}{x+2}$

Donc $f(x)=(v\circ u)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

▸ Tableau de variation de u

x	0 ↗ $+\infty$
u	0 ↗

▸ Tableau de variation de v

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
v	↗	‖	↗

• Puisque u est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

• si $x\in[0;+\infty[$ $u(x)\geq 0$ alors : $u(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$

• v est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Alors $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien