http://www.xriadiat.com **DS1: H** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (2,5pts) : Montrer que : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}$: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\succ\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a\succ b$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $a\le b\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$??

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}$

On a : $a\le b\Rightarrow a\le b$ et $a+1\le b+1$

$\Rightarrow\sqrt{a}\le\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+1}\le\sqrt{b+1}\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

Donc : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}$; $a\le b\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

Donc par contraposition on déduit que : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}$: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\succ\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a\succ b$

Exercice2 : (5pts) Soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$; $y\in\mathbb{R}^{*+}$

On pose : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$; $x+y=1$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^{2}\right)$: $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2a$

2) Montrer que : $A\ge(a+1)^{2}$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge 9$

Solution : 1) a) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^{2}$

$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y\ge 2\sqrt{x}\sqrt{y}\Leftrightarrow\sqrt{x}^{2}+\sqrt{y}^{2}-2\sqrt{x}\sqrt{y}\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{2}\ge 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^{2}\right)$: $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$

2) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^{2}$

On a : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^{2}\right)$: $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ et puisque : $\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\frac{1}{y}\in\mathbb{R}^{*+}$ on appliquant cette inégalité

On a donc : $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\ge\sqrt{\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ donc : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2\frac{1}{\sqrt{xy}}$ et comme : $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

Alors : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2a$

2) Montrons que : $A\ge(a+1)^{2}$

On a : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$ et comme : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2a$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}\Leftrightarrow a^{2}=\frac{1}{xy}$

Donc : $1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}\ge 1+2a+a^{2}$ c'est-à-dire : $A\ge(a+1)^{2}$

3) Déduisons que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge 9$

On a : $A\ge(a+1)^{2}$ c'est-à-dire : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge(a+1)^{2}$

Or on a : $x+y=1$ et $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ donc : $\frac{1}{2}\ge\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\ge 2\Rightarrow a\ge 2$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge(a+1)^{2}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge(2+1)^{2}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge 9$

Exercice3 : (2,5pts) : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$;

$S_{n}=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^{2}=1^{2}-2^{2}+3^{2}+...+n^{2}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_{n}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^{*}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_{1}=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^{k-1}k^{2}=(-1)^{1-1}1^{2}=1$ et $\frac{1(1+1)}{2}(-1)^{1+1}=1\times(-1)^{2}=1$

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$S_{n}=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^{2}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n}$??

Remarque : $(-1)^{n+2}=(-1)^{n}\times(-1)^{2}=(-1)^{n}\times 1=(-1)^{n}$ et

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^{2}=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^{2}+(-1)^{n}(n+1)^{2}=S_{n}+(-1)^{n}(n+1)^{2}$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_{n}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}+(-1)^{n}(n+1)^{2}=\frac{1}{2}\left(-n(n+1)(-1)^{n}+2(-1)^{n}(n+1)^{2}\right)$

Car : $(-1)^{n+1}=(-1)^{n}\times(-1)^{1}=-(-1)^{n}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)(-1)^{n}(-n+2(n+1))=\frac{1}{2}(-1)^{n}(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^{*}$: $S_{n}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Exercice4 : (1,5pts) : $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=x\sqrt{x^{2}+1}-x^{2}$

1) Développer $\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)^{2}$

2) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}$

$\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)^{2}=x^{2}+1-2x\sqrt{x^{2}+1}+x^{2}=2x^{2}+1-2x\sqrt{x^{2}+1}$

2) Démontrons que f est majorée par $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\le\frac{1}{2}$

$f(x)-\frac{1}{2}=x\sqrt{x^{2}+1}-x^{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+2x^{2}-2x\sqrt{x^{2}+1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)^{2}$

Or : $\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)^{2}>0$ donc : $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)^{2}<0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Ainsi : $f(x)<\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ Par suite : f est majorée par $\frac{1}{2}$

Exercice5 : (8,5pts) : $(1{,}5\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt})$

Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x)=x^{2}-2x+2$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2)Tracer Les courbes représentatives (C_{f}) et (C_{g}) dans le même repère

3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x+3-2\sqrt{x+1}$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de h sur $[0;+\infty[$

c) Soit : $a\in[1;+\infty[$; Montrer que : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\le\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\rightarrow f(x)=x^{2}-2x+2$; $D_{f}=\mathbb{R}$: On a $a=1>0$; $b=-2$ et $c=2$ $\left(f(x)=ax^{2}+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=1$ et $(f(1)=1)$

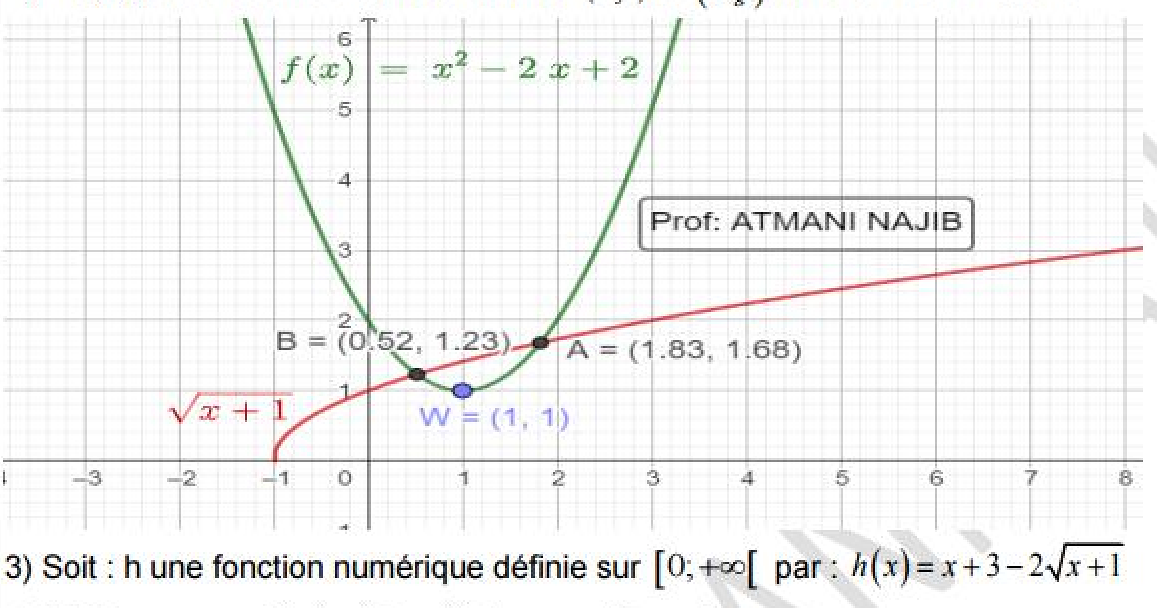
Donc la courbe (C_{f}) c'est une parabole de sommet $S(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ 1 $\nearrow$

$\rightarrow g(x)=\sqrt{x+1}$; $D_{g}=\{x\in\mathbb{R}/x+1\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\ge -1\}=[-1;+\infty[$

x	-1 $+\infty$
$g(x)$	0 $\nearrow$

2) Traçage des courbes représentatives (C_{f}) et (C_{g}) dans le même repère



3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x+3-2\sqrt{x+1}$

a) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

Soit : $x\in[0;+\infty[$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^{2}-2g(x)+2=\left(\sqrt{x+1}\right)^{2}-2\sqrt{x+1}+2=x+1-2\sqrt{x+1}+2=x+3-2\sqrt{x+1}=h(x)$

b) Déduisons les variations de h sur $[0;+\infty[$

Puisque g est croissante sur $[0;+\infty[$ et $g([0;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et f est décroissante sur $[1;+\infty[$ alors h est croissante sur $[0;+\infty[$

c) Soit : $a\in[1;+\infty[$; Montrons que : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\le\frac{1}{2}$

Puisque : h est croissante sur $[0;+\infty[$

$a\in[1;+\infty[\Rightarrow a\ge 1\Rightarrow a-1\ge 0$

On : $a-1\le a$ et puisque : h est croissante sur $[0;+\infty[$ Alors : $h(a-1)\le h(a)$

Alors : $a-1+3-2\sqrt{a-1+1}\le a+3-2\sqrt{a+1}$

Alors : $a-2\sqrt{a}+2\le a+3-2\sqrt{a+1}$

Alors : $-2\sqrt{a}\le 1-2\sqrt{a+1}$

Alors : $2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\le 1$ Alors : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\le\frac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien