http://www.xriadiat.com **DS1: G** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1+1+1\text{pts})$

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes. (Justifier les réponses avec un raisonnement logique)

1) $P: (\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})\, x\leq y\Rightarrow x^2\leq y^2$

2) $Q: (\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[)\, x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

3) $R: (\forall x\in\mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1$

Solution :1) $\overline{P\Rightarrow Q}\Leftrightarrow\overline{\overline{P}\vee Q}\Leftrightarrow P\wedge\overline{Q}$

$\overline{P}: (\exists x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})\, x\leq y \text{ et } x^2\succ y^2$

$(\exists x=-2\in\mathbb{R});(\exists y=-1\in\mathbb{R})-2\leq -1 \text{ et } (-2)^2\succ(-1)^2$

On a : $\overline{P}$ est vraie car par suite : P est une proposition fausse.

2) $Q: (\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[): x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

Soit : $(x;y)\in([1.+\infty[)^2$

Montrons : $x\times y=1\Rightarrow x=y=1$

Supposons : $x\times y=1$ et Montrons : $x=1$ et $y=1$

Par l'absurde Supposons : $x\neq 1$ ou $y\neq 1$

puisque $(x;y)\in([1.+\infty[)^2$ alors : $x\succ 1$ ou $y\succ 1$ et donc : $xy\succ 1$ absurde

Donc : $x=y=1$

Donc : $Q: (\forall x\in[1.+\infty[);(\forall y\in[1.+\infty[): x\times y=1\Rightarrow x=y=1$ est vraie

$\overline{Q}: (\exists x\in[1.+\infty[);(\exists y\in[1.+\infty[): x\times y=1 \text{ et}(\ x\neq 1 \text{ ou } y\neq 1)$

3) $R: (\forall x\in\mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow\sqrt{x}\geq 0$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow x+1\geq 1\Rightarrow\sqrt{x+1}\geq\sqrt{1}\Rightarrow\sqrt{x+1}\geq 1$

$\sqrt{x}\geq 0$ et $\sqrt{x+1}\geq 1\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1+0\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1$

Donc : R est vraie

Exercice2 : (3,5pts) : $(0{,}5\text{pts}+2\text{pts}+1\text{pts})$

Soit f la fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ par : $f(0)=3$ et $f(n+1)=2f(n)+5$

1)a) Calculer : $f(1)$; $f(2)$

b) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)\succ 0$ et déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)-f(n)\succ 0$

2) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\,/\,f(n)=2^{n+3}-5$

Solution : 1) On a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)=2f(n)+5$

Pour : $n=0$: $f(0+1)=2f(0)+5\Rightarrow f(1)=2f(0)+5\Rightarrow f(1)=2\times 3+5=11$

Pour : $n=1$: $f(1+1)=2f(1)+5\Rightarrow f(2)=2f(1)+5\Rightarrow f(2)=2\times 11+5=27$

b) Montrons que : $P(n)$" $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)\succ 0$"

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $f(0)=3\succ 0$

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n)\succ 0$"

Montrons que : $f(n+1)\succ 0$"??

On a : $f(n+1)=2f(n)+5$ et puisque $f(n)\succ 0$

Alors : $2f(n)\succ 0\Rightarrow 2f(n)+5\succ 5\succ 0$ c'est-à-dire : $f(n+1)\succ 0$"

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)\succ 0$

Soit : $n\in\mathbb{N}$ on a : $f(n+1)=2f(n)+5$

Donc : $f(n+1)-f(n)=2f(n)+5-f(n)=f(n)+5\succ 0$ car $f(n)\succ 0$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)-f(n)\succ 0$

2) Montrons par récurrence que : $P(n)$ " $\forall n\in\mathbb{N}\,/\,f(n)=2^{n+3}-5$ "

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $f(0)=3$ et $2^{0+3}-5=8-5=3$

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n)=2^{n+3}-5$ "

Montrons que : $f(n)=2^{n+4}-5$ "??

On a : $f(n+1)=2f(n)+5$ et $f(n)=2^{n+3}-5$

Alors : $f(n+1)=2(2^{n+3}-5)+5=2^{n+4}-10+5=2^{n+4}-5$

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)=2^{n+3}-5$ "

Exercice3 : (3,5pts) : $(1+0{,}5+1\text{pts}+1\text{pts})$

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $2x-\sqrt{x}+1>0$

b) Déduire que : $D_f=\mathbb{R}^+$

2) a) Montrer que : la fonction f est minorée ; 0 est-elle valeur minimale de f ?

b) Montrer que 2 est la valeur maximale de f

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $2x-\sqrt{x}+1>0$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $2x-\sqrt{x}+1=2\sqrt{x}^2-\sqrt{x}+1=2\left(\sqrt{x}^2-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)+1=2\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)+1$

$2x-\sqrt{x}+1=2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$ car : $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0$ et $\frac{7}{8}>0$

b) Déduisons que : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}$: $D_f=\mathbb{R}^+$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^+ \text{ et } 2x-\sqrt{x}+1\neq 0$ comme : $2x-\sqrt{x}+1>0$ alors : $2x-\sqrt{x}+1\neq 0$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^+$ Donc : $D_f=\mathbb{R}^+$

2) a) Montrons que : la fonction f est minorée

Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}>0$ car $2\sqrt{x}+1>0$ et $2x-\sqrt{x}+1>0$

Donc : la fonction f est minorée par 0

Mais : $f(x)\neq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}^+$ par suite :0 n'est pas valeur minimale de f

b) Montrons que 2 est la valeur maximale de f : Soit $x\in\mathbb{R}^+$:

$$2-f(x)=2-\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{4x-2\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{4x-4\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{(2\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2x-\sqrt{x}+1}\geq 0$$

Car : $(2\sqrt{x}-1)^2\geq 0$ et $2x-\sqrt{x}+1>0$: $\forall x\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=2\Leftrightarrow 2-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2x-\sqrt{x}+1}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $f(x)\leq f\left(\frac{1}{4}\right)=2$ Par suite : $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}^+$

Exercice4 : (10pts) : $(1{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt})$

Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2) Vérifier que : $g(2)=f(2)$

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère en précisant les points d'intersections

4) Déterminer graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;2]$; $[2;+\infty[$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $2x-\sqrt{x-1}\geq x^2-1$

6) Soit : h une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

b) En déduire les variations de h sur $[1;+\infty[$ et dresser son tableau de variation

c) Soit : $a\in[3;+\infty[$; Montrer que : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq-\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\rightarrow f(x)=-x^2+2x+1$; $D_f=\mathbb{R}$ On a $a=-1<0$; $b=2$ et $c=1\,(f(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=1$ et $(f(1)=2)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

$\rightarrow g(x)=\sqrt{x-1}$; $D_g=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 1\}=[1;+\infty[$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	

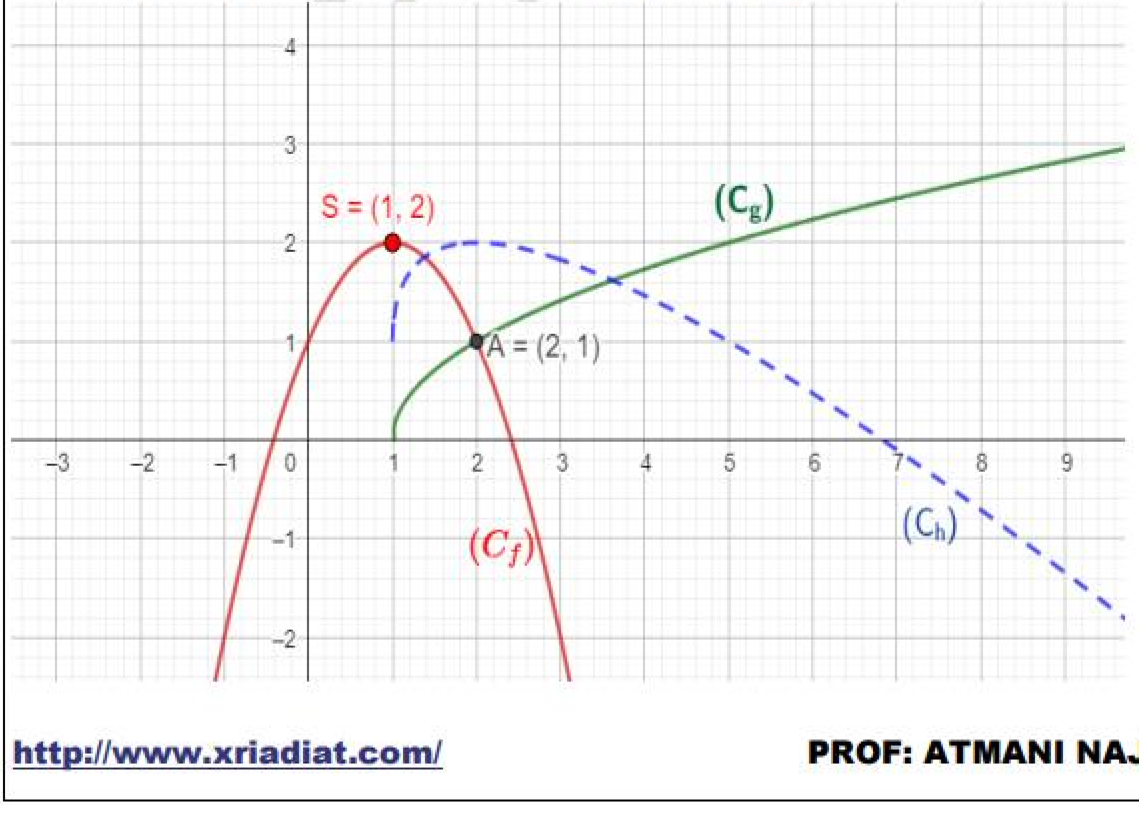
2) Vérifions que : $g(2)=f(2)$: $f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

$f(2)=-2^2+2\times 2+1=-4+4+1=1$ et $g(2)=\sqrt{2-1}=1$

Donc : $g(2)=f(2)$

Graphiquement : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;1)$

3) Traçage des courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère



4) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;2]$; $[2;+\infty[$

$g([1;2])=[0;1]$ et $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$

5) Résolvons graphiquement l'inéquation : $x^2-4x+3(2-\sqrt{x})<0$

Soit : $x\in[1;+\infty[$; $2x-\sqrt{x-1}\geq x^2-1\Leftrightarrow -x^2+2x+1\geq\sqrt{x-1}\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[1;2]$

Donc : $S=[1;2]$

6) a) Soit : h une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

a) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

Soit : $x\in[1;+\infty[$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-(g(x))^2+2g(x)+1=-\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}+1=-x+1+2\sqrt{x-1}+1=-x+2+2\sqrt{x-1}=h(x)$$

b) Déduisons les variations de h sur $[1;+\infty[$

$\rightarrow$Puisque g est croissante sur $[1;2]$ et $g([1;2])\subset[0;1]$ et f est croissante sur $[0;1]$ alors h est croissante sur $[1;2]$

$\rightarrow$Puisque g est croissante sur $[2;+\infty[$ et $g([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et f est décroissante sur $[1;+\infty[$ alors h est décroissante sur $[2;+\infty[$

Le tableau de variation de h :

x	1	2	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

Car : $h(2)=-2+2+2\sqrt{2-1}=2$

c) Soit : $a\in[3;+\infty[$; Montrons que : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq-\frac{1}{2}$

$a\in[3;+\infty[\ \Rightarrow a\geq 3\Rightarrow a-1\geq 2$

On : $a-1\leq a$ et puisque : h est décroissante sur $[2;+\infty[$

Alors : $h(a-1)\geq h(a)$ et $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

Alors : $-a+1+2+2\sqrt{a-1-1}\geq -a+2+2\sqrt{a-1}$

Alors : $2\sqrt{a-2}\geq 2\sqrt{a-1}-1\Leftrightarrow 2\sqrt{a-2}-2\sqrt{a-1}\geq -1\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\right)\geq -1$

Alors : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq-\frac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien