http://www.xriadiat.com **DS1: F** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) : Ecrire la négation et donner les valeurs de vérités des propositions suivantes :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R}): x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}): x<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

Solution :1) $P:(\forall x\in\mathbb{R}): x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R}): x\neq 2\ et\ x^2=4$

$\overline{P}$: est une proposition vraie car : $(\exists x=-2\in\mathbb{R}): -2\neq 2\ et\ (-2)^2=4$

Par suite : $P:(\forall x\in\mathbb{R}): x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$ est fausse

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}): x<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

Q : est une proposition vraie car : $(\exists x=-1000\in\mathbb{R}): -1000<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

$\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}): x<2\ et\ x^2\prec 2019$ est fausse

Exercice2 : (2,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts})$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est un multiple de 11

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$2^{10\times1-7}+3^{5\times1-2}-2=2^3+3^3-2^1=8+27-2=33=3\times11$

Donc P (1) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/2^{10n-7}+3^{5n-2}-2=11k$ donc :

$\exists k\in\mathbb{N}/2^{10n-7}=11k-3^{5n-2}+2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/2^{10n+10-7}+3^{5n+5-2}-2=11k'$??

$2^{10n+10-7}+3^{5n+5-2}-2=2^{10n-7}\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5=\left(11k-3^{5n-2}+2\right)\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5-2$

$=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times2^{10}+2\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5-2=11k\times2^{10}+3^{5n-2}\left(3^5-2^{10}\right)+2\times2^{10}-2$

$=11k\times2^{10}+3^{5n-2}(243-1024)+2\times1024-2=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times781+2046$

$=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times11\times71+186\times11$

$=11\left(k\times2^{10}-3^{5n-2}\times71+186\right)=11k'$ avec $k'=k\times2^{10}-3^{5n-2}\times71+186\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est un multiple de 11

Exercice3 : (3,5pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\neq0\ et\ x\geq0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\neq-2\ et\ x\geq0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\geq-1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-(-1)=f(x)+1=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\geq0$

Donc $f(x)\geq-1\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et on a :

$f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0\Leftrightarrow x=0$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x)\geq f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)-1=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\dfrac{-4}{\sqrt{x}+2}\prec0$

Donc : $f(x)\prec1\ \ \forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc : f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

Exercice4 : (3,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h

2) Déterminer : $h(x)\ \ \forall x\in D_{g\circ f}$

3) Soit la fonction k définie par : $k(x)=\dfrac{1}{4x-3}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-3\}$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\right\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq1\ et\ f(x)\neq-3\}$

$f(x)=-3\Leftrightarrow\dfrac{x}{x-1}=-3\Leftrightarrow-3(x-1)=x\Leftrightarrow-3x+3=x\Leftrightarrow-4x=-3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$

Donc : $D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq1\ et\ x\neq\dfrac{3}{4}\right\}$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$

2)Soit $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$: $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$$h(x)=\frac{\dfrac{x}{x-1}-1}{\dfrac{x}{x-1}+3}=\frac{\dfrac{x-x+1}{x-1}}{\dfrac{x+3x-3}{x-1}}=\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{4x-3}{x-1}}=\frac{1}{4x-3}$$

Donc : $h(x)=\dfrac{1}{4x-3}$: $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h=D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$ et $D_k=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

Exercice5 : (8,5pts) : $(1{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+2\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt})$

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x-3$ et $g(x)=-\dfrac{x+1}{x-1}$

(C_f) ; (C_g) Les courbes représentatives de f et g.

1) Donner le tableau de variations de f et g

2) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;0)$ et $B(2;-3)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)\geq f(x)$

3)Soit h la fonction définie sur $[-1;3]$ par : $h(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}$

a) Vérifier que : $h(x)=(g\circ f)(x)\ \ \forall x\in[-1;3]$

b) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $[-1;1]$; $[1;3]$ puis dresser le tableau de variations de h sur : $[-1;3]$

Solution : 1) a) $g(x)=-\dfrac{x+1}{x-1}$; on a $g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-1\neq0\Leftrightarrow x\neq1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}-1&-1\\1&-1\end{vmatrix}=2>0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=-1$.

<u>Donc le tableau de variations de g</u>

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

b) $f(x)=x^2-2x-3$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=-3$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$: $\alpha=-\dfrac{-2}{2\times1}=1$ et $\beta=g(\alpha)=f(1)=1^2-2\times1-3=-4$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W'(1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Donc le tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗

2) a) Vérifions que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;0)$ et $B(2;-3)$

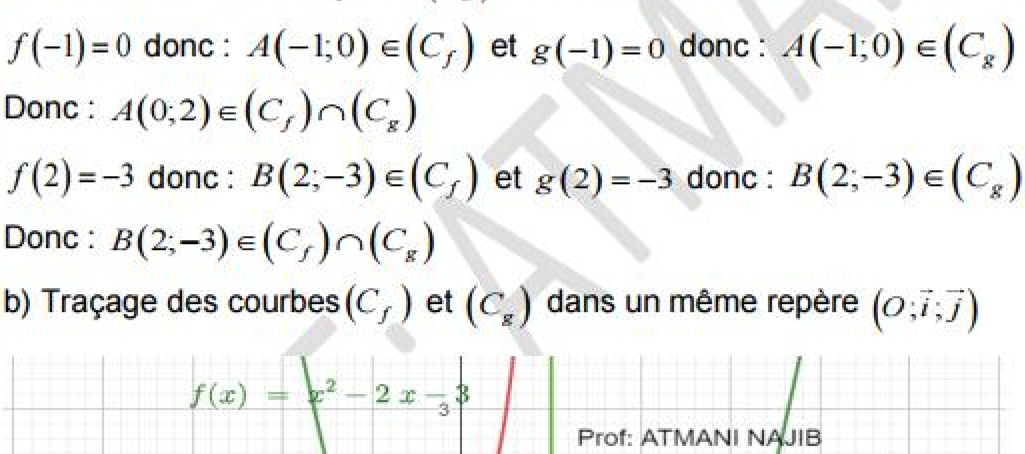
$f(-1)=0$ donc : $A(-1;0)\in(C_f)$ et $g(-1)=0$ donc : $A(-1;0)\in(C_g)$

Donc : $A(0;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=-3$ donc : $B(2;-3)\in(C_f)$ et $g(2)=-3$ donc : $B(2;-3)\in(C_g)$

Donc : $B(2;-3)\in(C_f)\cap(C_g)$

b) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



c) Résolution graphique de l'inéquation : $g(x)\geq f(x)$

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in[-1;1[$

Donc $S=[-1;1[$

3)Soit h la fonction définie sur $[-1;3]$ par : $h(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}$

a) Vérifions que : $h(x)=(g\circ f)(x)\ \ \forall x\in[-1;3]$

Soit : $x\in[-1;3]$; $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}=\dfrac{-x^2+2x+3-1}{x^2-2x-3-1}=\dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}=h(x)$

Donc : $h(x)=(g\circ f)(x)\ \ \forall x\in[-1;3]$

b) → Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[-1;1]$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘	-4	↗	0	↗

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

Puisque f est décroissante sur $[-1;1]$ et $f([-1;1])=[-4;0]$ et g est croissante sur $[-4;0]$ alors $h=g\circ f$ est décroissante sur $[-1;1]$

→ Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[1;3]$

Puisque f est croissante sur $[1;3]$ et $f([1;3])=[-4;0]$ et g est croissante sur $[-4;0]$ alors $h=g\circ f$ est croissante sur $[1;3]$

→Le tableau de variations de h sur $[-1;3]$:

x	-1		1		3
$h(x)$	$\frac{1}{4}$	↘	$-\frac{3}{5}$	↗	$\frac{1}{3}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien