http://www.xriadiat.com **DS1: E** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : (2,5pts) : $(1{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts})$

On considère les assertions suivantes P : "$(\forall x\in]0;+\infty[):1+x\geq 2\sqrt{x}$ et $\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$"

Q : "$(\forall x\in]0;+\infty[):x+\frac{1}{x}\succ 2$ ou $x^2+x\prec 1$"

1) Montrer que P est une assertion vraie

2) Déterminer : $\overline{P}$

3) Montrer que Q est une assertion fausse

Solution :1) Montrons que P : "$(\forall x\in]0;+\infty[):1+x\geq 2\sqrt{x}$ et $\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$"

a) Soit : $x\in]0;+\infty[$; Montrons que : $1+x\geq 2\sqrt{x}$

$1+x-2\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\times 1+1^2=(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$

Donc : $(\forall x\in]0;+\infty[):1+x\geq 2\sqrt{x}$ est vraie

b) Montrons que "$(\forall x\in]0;+\infty[):\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$"

Soit : $x\in]0;+\infty[$; Montrons que : $\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}=\frac{x^2-2x+1^2}{1+x^2}=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}\geq 0$ est vraie "$(\forall x\in]0;+\infty[):\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$" est vraie

Par suite : P est une assertion vraie

2)Déterminons : $\overline{P}$

$\overline{P}$: "$(\exists x\in]0;+\infty[):1+x\prec 2\sqrt{x}$ ou $\frac{x}{1+x^2}\succ\frac{1}{2}$"

3) Q : "$(\forall x\in]0;+\infty[):x+\frac{1}{x}\succ 2$ ou $x^2+x\prec 1$"

$\overline{Q}$: "$(\exists x\in]0;+\infty[):x+\frac{1}{x}\leq 2$ et $x^2+x\geq 1$" est vraie car : $(\exists 1\in]0;+\infty[):1+\frac{1}{1}\leq 2$ et $1^2+1=2\geq 1$

Par suite : Q est une assertion fausse

Exercice2 : (1,5pts) : Montrer que : $\forall (a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$: $(b>a\Rightarrow b^2-a^2\geq 3)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par implications :

Soit : $(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$; Supposons que : $b>a$ et Montrons que : $b^2-a^2\geq 3$

On a : $b>a\Rightarrow b\geq a+1\Rightarrow b^2\geq (a+1)^2\Rightarrow b^2\geq a^2+2a+1\Rightarrow b^2-a^2\geq 2a+1$

Or : $a\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a\geq 1\Rightarrow 2a\geq 2\Rightarrow 2a+1\geq 3$

Alors : $b^2-a^2\geq 2a+1\geq 3$ c'est-à-dire : $b^2-a^2\geq 3$

Conclusion : $\forall (a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$: $(b>a\Rightarrow b^2-a^2\geq 3)$

Exercice3 : (1,5pts) : Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R};(x\neq -2\Rightarrow x^3+2x^2+x+2\neq 0)$

Solution : Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :
$\forall x\in\mathbb{R};(x\neq -2\Rightarrow x^3+2x^2+x+2\neq 0)$

Soit : $x\in\mathbb{R}$; Par contraposée Montrons que : $(x^3+2x^2+x+2=0\Rightarrow x=-2)$

Supposons que : $x^3+2x^2+x+2=0$ Alors : $x^2(x+2)+(x+2)=0$

Alors : $(x+2)(x^2+1)=0$

Alors : $x+2=0$ ou $x^2+1=0$

Alors : $x=-2$ ou $x^2=-1$ (impossible)

Alors : $x=-2$

Donc : $(x^3+2x^2+x+2=0\Rightarrow x=-2)$

Par contraposée on a donc : $\forall x\in\mathbb{R};(x\neq -2\Rightarrow x^3+2x^2+x+2\neq 0)$

Exercice4 : (1,5pts) : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=12$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=12$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x=y$ et $y=z$ et $z=x$

C'est-à-dire supposant que : $x=y=z$

Comme on a : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=12$ et $x=y=z$

Alors : $x(x+x)+x(x+x)+x(x+x)=12$

Donc : $2x^2+2x^2+2x^2=18\Rightarrow 6x^2=12\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$ contradiction car $x\in\mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Exercice5 : (3pts) : $(1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

1) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2$

1) Calculer : S_1 ; S_2 et S_3

2) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

Solution : 1) $S_1=1^2=\sum_{k=0}^{k=0}(2k+1)^2=1$ et $S_2=1^2+3^2=\sum_{k=0}^{k=1}(2k+1)^2=1+9=10$

$S_3=1^2+3^2+5^2=\sum_{k=0}^{k=2}(2k+1)^2=1+9+25=35$

2)Notons P(n) la proposition : "$S_n=\frac{n(4n^2-1)}{3}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $S_1=1$ et $\frac{1(4\times 1^2-1)}{3}=\frac{3}{3}=1$ donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^2=\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}=\frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}$??

C'est-à-dire montrons que : $S_{n+1}=\frac{4n^3+8n^2+3n+4n^2+8n+3}{3}=\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2+(2n+1)^2$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=\frac{4n^3-n+3(2n+1)^2}{3}=\frac{4n^3-n+3(4n^2+4n+1)}{3}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{4n^3-n+12n^2+12n+3}{3}=\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

Exercice6 : (2 pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts})$

Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}-\{0;1\}$ el que :

$f(x+1)=\frac{1}{1-f(x)}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

2)Déduire que f est périodique et $T=3$ est une période de f

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=f((x+1)+1)=\frac{1}{1-f(x+1)}$ et on a : $f(x+1)=\frac{1}{1-f(x)}$

Donc : $f(x+2)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}}=\frac{1}{\frac{1-f(x)-1}{1-f(x)}}=\frac{f(x)-1}{f(x)}=1-\frac{1}{f(x)}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

2) Calculons : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x+3)=?$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+3)=f((x+1)+2)$ comme on a : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

Alors : $f(x+3)=f((x+1)+2)=1-\frac{1}{f(x+1)}=1-(1-f(x))=f(x)$

4)Déduisons que f est périodique :

Puisque $\rightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}$: $x+3\in\mathbb{R}$

$\rightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+3)=f(x)$

Alors : f est périodique et 3 est une période de f

Exercice7 : (8pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt})$

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $f(x)=\frac{x}{x+2}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_h tel que : $h=g\circ f$

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x>(x+2)\sqrt{x+1}$

4) Étudier les variations de h sur : $]-\infty;-2[$ et $[-1;+\infty[$

5) Calculer $h(x)=(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_h$

Solution : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $f(x)=\frac{x}{x+2}$ et $h=g\circ f$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2\}=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\}=[-1,+\infty[$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f$ et $f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2$ et $f(x)\geq -1\}$

$f(x)\geq -1\Leftrightarrow\frac{x}{x+2}\geq -1\Leftrightarrow\frac{x}{x+2}+1\geq 0\Leftrightarrow\frac{x+x+2}{x+2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2x+2}{x+2}\geq 0$

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2x+2}{x+2}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

$f(x)\geq -1\Leftrightarrow x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$

Donc : $D_h=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2$ et $x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[\}$

Donc : $D_h=]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$

1) Déterminons les tableaux de variations de f et g

$\rightarrow$Le tableau de variations de f : $f(x)=\frac{x}{x+2}$

En générale si : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{x}{x+2}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $C(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-2$ et $y=1$

$f(x)=\frac{1x+0}{1x+2}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-0=2>0$

Donc : f est strictement croissante sur : $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$

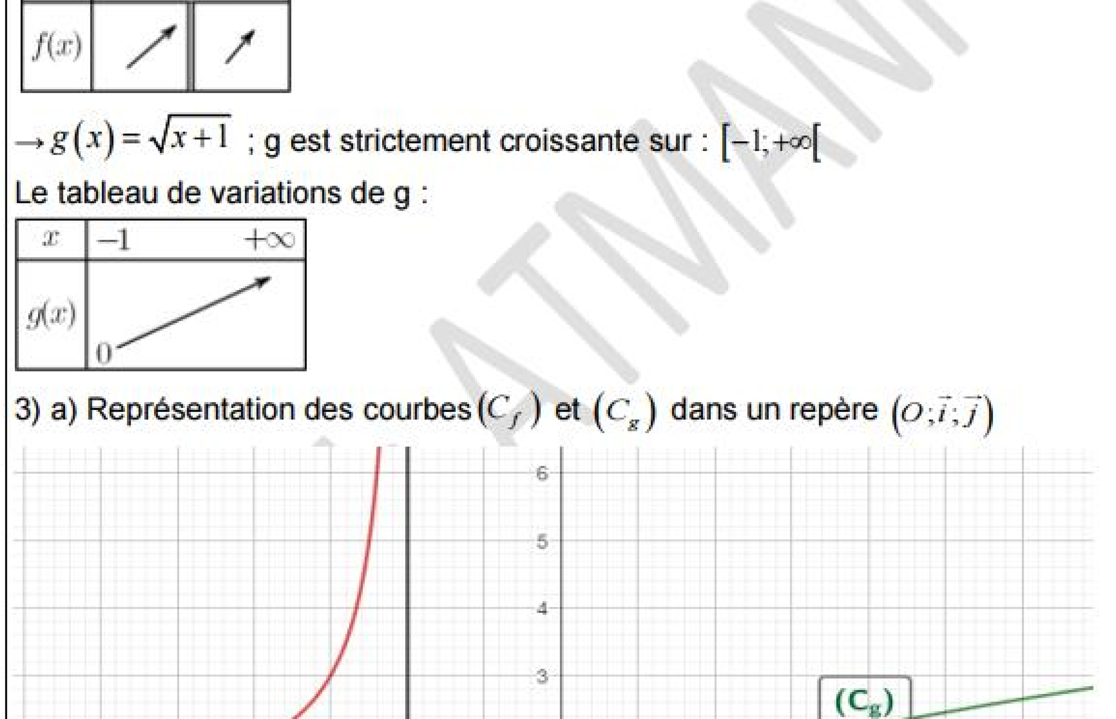
x	$-\infty$ -2	$+\infty$
$f(x)$	↗ ‖	↗

$\rightarrow g(x)=\sqrt{x+1}$; g est strictement croissante sur : $[-1;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	0	↗

3) a) Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



b) Résolvons graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x>(x+2)\sqrt{x+1}$

Soit : $x\in[-1,+\infty[$: $\Rightarrow x\geq -1\Rightarrow x+2\geq 1>0$

$x>(x+2)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\frac{x}{(x+2)}>\sqrt{x+1}$ car $x+2>0$

$x>(x+2)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$

Et puisque : graphiquement sur $[-1;+\infty[$ (C_f) est au-dessous de (C_g) alors : $S=\varnothing$

4) $\rightarrow$Etudions les variations de $h=g\circ f$ sur : $]-\infty;-2[$

x	$-\infty$ -2	$+\infty$
$f(x)$	↗ ‖	↗

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	0	↗

Puisque f est croissante sur $]-\infty;-2[$

et $f([-2;+\infty[)\subset]1;+\infty[$ et g est croissante sur $]1;+\infty[$

alors : $h=g\circ f$ est croissante sur $]-\infty;-2[$

$\rightarrow$Etudions les variations de h sur : $[-1;+\infty[$

Puisque f est croissante sur $[-1;+\infty[$

et $f([-1;+\infty[)\subset[-1;1[$ et g est croissante sur $[-1;1[$ alors $h=g\circ f$ est croissante sur $[-1;+\infty[$

5) Calculons : $h(x)=(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_h$

Soit $x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$: $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{\frac{x}{x+2}+1}=\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}$

Alors : $h(x)=\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}$; $\forall x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien