http://www.xriadiat.com **DS1: D** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée : 2 heures

Exercice1 : (1,5pts) ; Soit La proposition $(P):\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

Déterminer sa négation et montrer que : (P) est fausse :

Solution : Sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$

En posant : $a=4$ et $b=3$ on aura : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$

Donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice2 : (1,5pts) ; Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow x=y\ ou\ xy=1\right)$

Solution : Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$;

Supposons que : $xy^2-x^2y=y-x$ et montrons que : $x=y\ ou\ xy=1$

$xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow xy(y-x)=y-x\Rightarrow xy(y-x)-(y-x)=0\Rightarrow(y-x)(xy-1)=0$

$\Rightarrow y-x=0\ ou\ xy-1=0\Rightarrow y=x\ ou\ xy=1$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow x=y\ ou\ xy=1\right)$

Exercice3 : (1,5pts) : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$

$x\neq y\ et\ x+y\neq 1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x+y=1$??

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

On a : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x^2-x+1=y^2-y+1$

$\Rightarrow x^2-y^2-(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-1)=0\Rightarrow x-y=0\ ou\ x+y-1=0$

$\Rightarrow x=y\ ou\ x+y=1$

Donc : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y\ ou\ x+y=1$

Donc par contraposition on déduit que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exercice4 : (2pts) : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x=y$ et $y=z$ et $z=x$

C'est-à-dire supposant que : $x=y=z$

Comme on a : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$ et $x=y=z$

Alors : $x(x+x)+x(x+x)+x(x+x)=18$

Donc : $2x^2+2x^2+2x^2=18\Rightarrow 6x^2=18\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\mp\sqrt{3}$ contradiction car $x\in\mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Exercice5 : (3pts) : (1,5pts+1,5pts) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x+3$

1) Déterminer $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ On pose : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^nx+3(2^n-1)$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$

1) Déterminons $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=2f(x)+3=2(2x+3)+3=2^2x+6+3=4x+9$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ On pose : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^nx+3(2^n-1)$

On pose : $P(n)$: $f^{(n)}(x)=2^nx+3(2^n-1)$

1étapes : l'initialisation :

Pour n=2 nous avons :d'une part : $f^{(2)}(x)=4x+9$ et $2^nx+3(2^n-1)=2^2x+3(2^2-1)=4x+9$

Donc $f^{(n)}(x)=2^nx+3(2^n-1)$ pour : n=2

Donc : $P(2)$ est vraie.

2étapes : d'hérédité :Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ Supposons que $P(n)$ soit vraie

C'est-à-dire : $f^{(n)}(x)=2^nx+3(2^n-1)$

3étapes : Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

Montrons alors que : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}x+3(2^{n+1}-1)$??

On a : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Donc : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)=f\left(f^{(n)}(x)\right)=2f^{(n)}(x)+3$ et comme : $f^{(n)}(x)=2^nx+3(2^n-1)$

Alors : $f^{(n+1)}(x)=2\left(2^nx+3(2^n-1)\right)+3=2\times2^nx+6(2^n-1)+3=2^{n+1}x+3(2\times2^n-2+1)=2^{n+1}x+3(2\times2^{n+1}-1)$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^nx+3(2^n-1)$

Exercice6 : (11,5pts) : (1pt + 1pt + 1pt + 1pt+2pt+0,5pt+1pt+1pt+3pt)

Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;5)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) a) Résoudre graphiquement de l'équation $f(x)=g(x)$:

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

7)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

a) Déterminer D_h

b) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\in D_h$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

Solution : 1) $f(x)=x^2+1$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$; $b=0$ et $c=1$

Donc $\alpha=-\frac{0}{2a}=0$ et $f(\alpha)=f(0)=0^2+1=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;h(\alpha))$ c'est à dire : $W(0;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=0$

Comme : $\boxed{a=1>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

Le tableau de variations de f : $\boxed{a=1>0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

2) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; on a $g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-1\neq0\Leftrightarrow x\neq1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; On utilisant un résumé de notre cours :

Si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc\succ0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ Avec : $a=2$; $b=1$; $c=1$; $d=-1$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\frac{-1}{1}=1$ et $y=\frac{2}{1}=2$

$\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=2\times(-1)-1\times1=-3<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	$\searrow$	‖	$\searrow$

3) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x-1}=0\Leftrightarrow2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

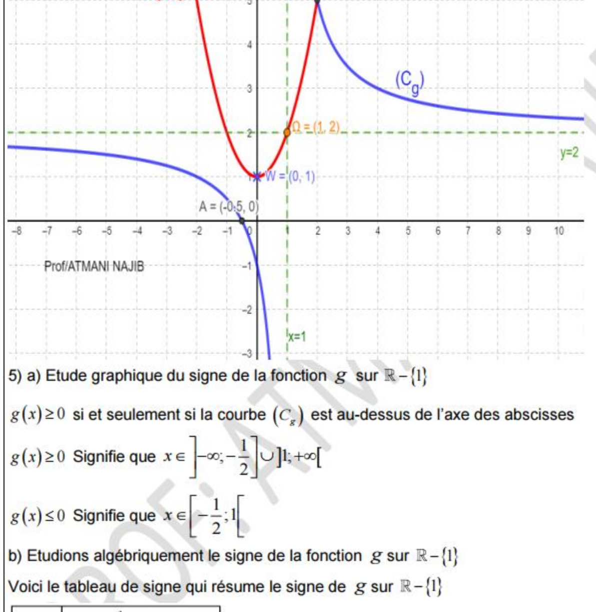
Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2\ ;\ 5)$

$f(2)=2^2+1=5$ donc : $A(2;5)\in(C_f)$ et $g(2)=\frac{2\times2+1}{2-1}=5$ donc : $A(2;5)\in(C_g)$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\{A(0;2)\}$

b) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) a) Etude graphique du signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$g(x)\geq0$ si et seulement si la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses

$g(x)\geq0$ Signifie que $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$

$g(x)\leq0$ Signifie que $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

b) Etudions algébriquement le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

Voici le tableau de signe qui résume le signe de g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

$g(x)\geq0$ $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$ et $g(x)\leq0$ $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

6) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2\ ;\ 5)$

Donc : l'abscisse du point d'intersection des courbes (C_f) et (C_g) est $x=2$ par suite : $S=\{2\}$

b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;1[\cup[2;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;1[\cup[2;+\infty[$

7) a) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/x^2-2x+1\neq0\}$

On a $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

b) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\in D_h$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2+1=\dfrac{(2x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{4x^2+4x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

Donc : $(f\circ g)(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}=h(x)$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

a) sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: On a $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\in D_h$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: $g(x)\in[0;+\infty[$ et f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$: $g(x)\in]-\infty;0]$ et f est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $h=f\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$

c) Sur $]1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x\in]1;+\infty[$ $g(x)\in]0;+\infty[$ et f est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$.

Donc le tableau de variations de h:

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$ ‖	$\searrow$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien