http://www.xriadiat.com **DS1: C** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures (La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : (3pts) : (1pts×3)

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.
(Justifier vos réponses)

1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});2x^2+xy+5y^2\neq 0$ »

2) Q: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=2\Rightarrow x\succ 2$ »

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N}^*)/\sqrt{4n^2+5n}\notin\mathbb{N}$ »

Solution : 1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});3x^2-xy+4y^2\neq 0$ »

Pour : $x=1\in\mathbb{R}$: $2\times1^2+1y+5y^2=5y^2+y+2$

$\Delta=1^2-40=-39\prec 0$ donc : $5y^2+y+2=0$ n'a pas solution c'est-à-dire : $5y^2+y+2\neq 0$

Alors P: est vraie

$\overline{P}$: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});2x^2+xy+5y^2=0$ »

2) Q : « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=1\Rightarrow x\succ 1$ » donc : $\overline{Q}$: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/x-y=2 \text{ et } x\leq 2$ »

Pour : $x=1$ et $y=-1$ on a : $x-y=1-(-1)=2 \text{ et } 1\leq 2$

Alors la proposition $\overline{Q}$: est vraie et par suite : Q: Fausse

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N}^*)/\sqrt{4n^2+5n}\notin\mathbb{N}$ » donc : $\overline{R}$: « $(\exists n\in\mathbb{N}^*)/\sqrt{4n^2+5n}\in\mathbb{N}$ »

Pour : $n=1$: $\sqrt{4\times1^2+5\times1}=\sqrt{9}=3\in\mathbb{N}$

Alors la proposition $\overline{R}$: est vraie et par suite : R: Fausse

Exercice2 : (3pts) : (1pts×3)

On considère les assertions suivantes : P : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2):f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

1) Ecrire la négation de P

2) Soit f l'application de : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}):f(x)=x^2+2x+2$

Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}):f(-x-2)=f(x)$

3) Est ce que : P est vraie ? justifier votre réponse

Solution :1) a) P : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2):f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Remarque : "$non(U\Rightarrow V)$" est "$U \text{ et } non(V)$"

Alors : $\overline{P}:(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2)/f(x)=f(y) \text{ et } x\neq y$

2) Montrons que : Soit : $x\in\mathbb{R}$; $f(-x-2)=(-x-2)^2+2(-x-2)+2$

$f(-x-2)=x^2+4x+4-2x-4+2=x^2+2x+2$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}):f(-x-2)=f(x)$

3) on a : $-x-2\neq x$ mais $f(-x-2)=f(x)$

Par exemple : x=1 alors $-1-2\neq 1$ c'est-à-dire : $-3\neq 1$mais : $f(-3)=f(1)$

Donc : $(\exists(1;-3)\in\mathbb{R}^2)/f(1)=f(-3) \text{ et } 1\neq -3$

C'est-à-dire : $\overline{P}$ est une assertion vraie
Par suite : P est une assertion fausse

Exercice3 : (1 ,5pts) :

1) Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :
$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;(xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow x=y \text{ ou } xy=1)$

Solution : Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$;

Supposons que : $xy^2-x^2y=y-x$ et montrons que : $x=y \text{ ou } xy=1$

$xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow xy(y-x)=y-x\Rightarrow xy(y-x)-(y-x)=0\Rightarrow(y-x)(xy-1)=0$

$\Rightarrow y-x=0 \text{ ou } xy-1=0\Rightarrow y=x \text{ ou } xy=1$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;(xy^2-x^2y=y-x\Rightarrow x=y \text{ ou } xy=1)$

Exercice4 : (1,5pts) :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrer que : $|2x^2+5xy+3y^2|\leq 3\Rightarrow|x+y|\leq\sqrt{3} \text{ ou } |2x+3y|\leq\sqrt{3}$

Solution : Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $|x+y|\succ\sqrt{3} \text{ et } |2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x^2+5xy+3y^2|\succ 3$

$|x+y|\succ\sqrt{3} \text{ et } |2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x+3y||x+y|\succ\sqrt{3}\times\sqrt{3}\Rightarrow|(2x+3y)(x+y)|\succ 3$

$\Rightarrow|2x^2+3xy+2xy+3y^2|\succ 3\Rightarrow|2x^2+5xy+3y^2|\succ 3$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ $|x+y|\succ\sqrt{3} \text{ et } |2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x^2+5xy+3y^2|\succ 3$

Alors : Par contraposition : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$|2x^2+5xy+3y^2|\leq 3\Rightarrow|x+y|\leq\sqrt{3} \text{ ou } |2x+3y|\leq\sqrt{3}$

Exercice5 : (2pts)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$:

$$S_n=1-a^1+a^2-a^3+a^4+\ldots-a^{2n-1}+a^{2n}=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}.$$

Solution : Notons P(n) la proposition : " $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $S_0=\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^k a^k=(-1)^0a^0=1$ et $\frac{a^1+1}{a+1}=1$

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k+(-1)^{2n+1}a^{2n+1}+(-1)^{2n+2}a^{2n+2}$

Remarque : $(-1)^{2n+2}=1$ car $2n+2$ pair et $(-1)^{2n+1}=-1$ car $2n+1$ impair

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}-a^{2n+1}+a^{2n+2}=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+1}(a+1)+a^{2n+2}(a+1)}{a+1}$

$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+2}-a^{2n+1}+a^{2n+3}+a^{2n+2}}{a+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$

$$S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}.$$

Exercice6 : (9pts) : $(1\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : f est minorée par 1 et majorée par 2

3)Soient U et V deux fonctions définies par : $U(x)=x^2+2x$ et $V(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

a) Donner le tableau de variation de U et V

b) Vérifier que : $f(x)=(V\circ U)(x)$ $\forall x\in D_f$

c) Étudier la monotonie de f dans les intervalles suivants : $]-\infty;-1]$ et $[-1;+\infty[$

d) Déterminer les extrémums de la fonction f

Solution : 1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x^2+2x+2\neq 0$

On a : $x^2+2x+2>0$ car : $\Delta=-4<0$ et $a=1>0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrons que : $1\leq f(x)\leq 2$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $\to f(x)-1=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\frac{2x^2+4x+3-x^2-2x-2}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}$

On a : $x^2+2x+2>0$ car : $\Delta=-4<0$ et $a=1>0$ et puisque : $(x+1)^2\geq 0$

Alors : $f(x)-1\geq 0$

Alors : $1\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

: $\to f(x)-2=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2=\frac{2x^2+4x+3-2x^2-4x-4}{x^2+2x+2}=\frac{-1}{x^2+2x+2}<0$ car $x^2+2x+2>0$

Alors : $f(x)<2$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : $1\leq f(x)<2$: $\forall x\in\mathbb{R}$

2)Soient U et V deux fonctions définies par : $U(x)=x^2+2x$ et $V(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

a) →le tableau de variation de U : $U(x)=x^2+2x$; $D_U=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=0$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times1}=-1$ Et $\beta=U(\alpha)=U(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=-1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_U) c'est une parabole de sommet $W(-1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-1$

→le tableau de variation de V : $V(x)=\frac{2x+3}{x+2}$; on a $V(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$

Donc : $D_V=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1>0$

(C_V) est l'hyperbole de centre $W'(-2;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$V(x)$	↗	‖	↗

b) Vérifions que : $f(x)=(V\circ U)(x)$ $\forall x\in D_f$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $(V\circ U)(x)=V(U(x))=\frac{2U(x)+3}{U(x)+2}=\frac{2(x^2+2x)+3}{x^2+2x+2}=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}=f(x)$

c) →Etudions la monotonie de f dans l'intervalle : $]-\infty;-1]$

On a : $f(x)=(V\circ U)(x)$ $\forall x\in D_f$

Puisque U est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et $\forall x\in]-\infty;-1]:U(x)\in[-1;+\infty[$ et V est croissante sur $[-1;+\infty[$ alors $f=V\circ U$ est décroissante sur $]-\infty;-1]$

→Etudions la monotonie de f dans l'intervalle : $[-1;+\infty[$

Puisque U est croissante sur $[-1;+\infty[$ et $\forall x\in[-1;+\infty[:U(x)\in[-1;+\infty[$ et V est croissante sur $[-1;+\infty[$ alors $f=V\circ U$ est croissante sur $[-1;+\infty[$

c) Déterminer les extrémums de la fonction f

→le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

→Le nombre 1 est le minimum absolu de f en -1

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien