http://www.xriadiat.com **DS1: B** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET Généralités sur les fonctions

Durée :2 heures

Exercice1 : 7,5pts : $(1{,}5\text{pts}\times 5)$

Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) P_1 : « $(\forall n\in\mathbb{N})$; $6n+5$ est un nombre premier »

2) P_2 : « $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$ »

3) P_3 : « $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x}{x+1}\neq 1$ »

4) P_5 : « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});0\prec y^2-x-1$

5) P_6 : « $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$ »

Solution : 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1}$: « $(\exists n\in\mathbb{N})$ / $6n+5$ n'est pas un nombre premier » est vraie

En effet : pour $(\exists n=12\in\mathbb{N})$ *et* $6\times 12+5=72+5=77=7\times 11$

77 n'est pas un nombre premier ($n=12$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$: est vraie par suite P_1 : est <u>fausse</u>

2) Montrons que : P_2 : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$ est vraie

Soit $n\in\mathbb{N}$: Par l'absurde, supposons que :: $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6}=m$

$\frac{4n+3}{6}=m\Leftrightarrow 4n+3=6m\Rightarrow 3=6m-4n\Rightarrow 3=2(3m-2n)\Rightarrow 3=2k$ avec $k=3m-2\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ 3est pair !. C'est une contradiction car on sait que : 3 est impair

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{4n+3}{6}\notin\mathbb{N}$

Autre procédure : $3=2(3m-2n)\Rightarrow 3=2k\Rightarrow$ 2 divise 3 $\Rightarrow$ absurde car on sait que : 2 ne divise pas 3

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

3) Montrons que : P_3 : « $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x}{x+1}\neq 1$ » est vraie

Utilisons un Raisonnement par contraposition : Montrons que : $\frac{3x}{x+1}=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{3x}{x+1}=1\Rightarrow 3x=x+1\Rightarrow 2x=1\Rightarrow 2x=1$

Alors : Par contraposition : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x}{x+1}\neq 1$

$\overline{P_3}$: $\exists x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $x\neq\frac{1}{2}$ *et* $\frac{3x}{x+1}=1$

4) P_5 : « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});0\prec y^2-x-1$

« $0\prec y^2-x-1\Leftrightarrow x+1\prec y^2$

il suffit de prendre : $x=-2$ et on trouve : $(\forall y\in\mathbb{R});-1\prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_5 : est vraie.

$\overline{P_5}$: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});0\geq y^2-x-1$

5) Montrons $P_6(n)$: « $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$ » est vraie ?

Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Nous allons démontrer par récurrence que $P_6(n)$: est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $2^0=1\geq 1+0$ donc $1\geq 1$.

Donc $P_6(0)$: est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que $P_6(n)$: soit vraie

c'est-à-dire : $2^n\geq 1+n$

3étapes : Nous allons montrer que $P_6(n+1)$: est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq 2+n$??

On a : $2^n\geq 1+n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $2^n\times 2\geq(1+n)\times 2$

Donc : $2^{n+1}\geq 2n+2$ et $2n+2\geq n+2$ car $2n+2-(n+2)=2n+2-n-2=n\geq 0$

Donc : $2^{n+1}\geq 2+n$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence

$P_6(n)$: « $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$ » est vraie

Exercice2 : $3\text{pts}(2\text{pts}+1\text{pts})$

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$ et paire

Tel que : $f(x)=x\quad\forall x\in[0,1]$

1) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{7}{2}\right)$; $f(2027)$; $f\left(-\frac{2006}{3}\right)$

2)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $I=[-5;5]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) $\rightarrow$ on a : $\frac{1}{2}\in[0,1]$ donc : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\rightarrow f\left(-\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}-4\right)=f\left(-2\times 2+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ car f est périodique de période $T=2$

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow f(2027)=f(1+2026)=f(2\times 1013+1)=f(1)=1$ car f est périodique de période $T=2$ et $1\in[0,1]$

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow f\left(-\frac{2006}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}-668\right)=f\left(-\frac{2}{3}-2\times 334\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ car f est périodique de période $T=2$

et $\frac{2}{3}\in[0,1]$: En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) f une fonction paire donc l'axe des ordonnées c'est un axe de symétrie de (C_f)

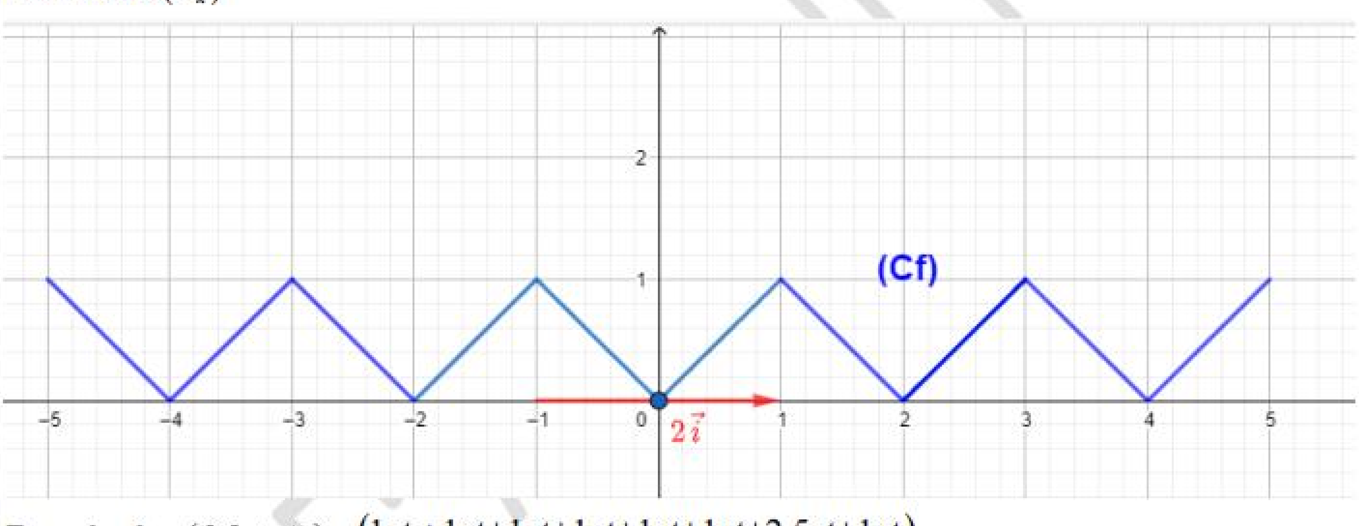
Dans l'intervalle $I_0'=[0,1]$: On a : f est une fonction linéaire

Donc la courbe de f (C_f) c'est un segment.

Soit (C_0) la courbe de f dans l'intervalle $I_0=[-1,1]$ et (C_k) la courbe de f dans l'intervalle $I_k=[-1+2k,1+2k]$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I=[-5;5]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $I_0=[-1,1]$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Pour tracer (C_k)



Exercice3: : (9,5pt pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+2{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) ä) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=1+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad\forall x\in D_f$

b) Etudier le signe de la fonction g sur D_g

3) Etudier la monotonie de f dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $]1;+\infty[$

4) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) ä) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: On a $f(x)=\frac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{x^2-2x+1}$

Alors : $f(x)=\frac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)^2+(2x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)^2}{(x-1)^2}+\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=1+\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}=1+\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$ avec : $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) Déduisons que : f est minorée sur D_f

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: Montrons que : $1\leq f(x)$

Puisque : $f(x)=1+\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$

Alors : $f(x)-1=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2\geq 0\;\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : $1\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Par suite f est minorée sur $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

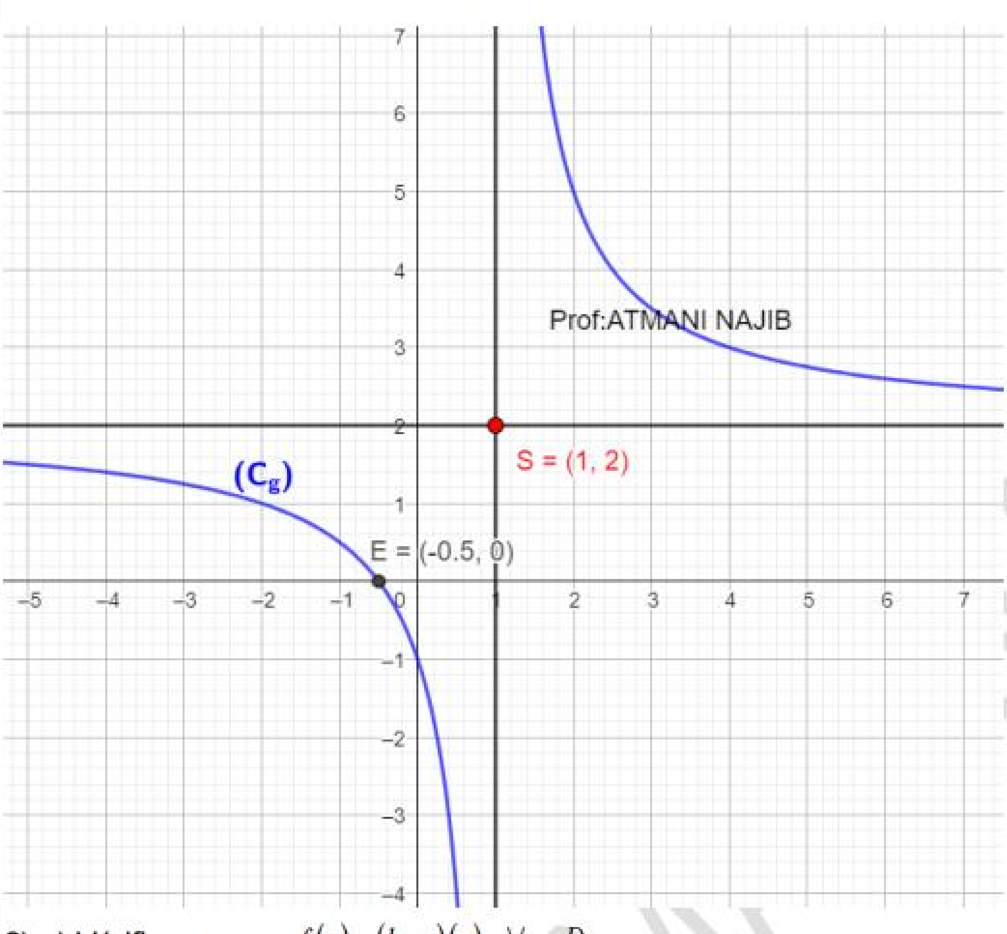
c) Comme : $f(x)-1=0\Leftrightarrow\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Alors : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ et donc : $f\left(-\frac{1}{2}\right)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : f admet-elle un minimum absolu c'est 1 en $-\frac{1}{2}$

d) $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$; $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$: $\Delta=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2-1=-3<0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $S(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$.



2) a) Vérifions que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad\forall x\in D_f$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $(h\circ g)(x)=h(g(x))=f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2+1=\frac{(2x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{4x^2+4x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

Donc : $(f\circ g)(x)=\frac{5x^2+2x+2}{(x-1)^2}=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}=f(x)$

Donc : $f=h\circ g$

c) Etudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

On peut étudier le signe soit :

Graphiquement : $\rightarrow(C_g)$ est au-dessous de l'axe des abscisses si : $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

Donc : $g(x)\leq 0\quad\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

$\rightarrow(C_g)$ est au-dessus de l'axe des abscisses si : $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$

Donc : $g(x)\geq 0\;\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$

Algébriquement : Le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$g(x)\geq 0\;\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$ et $g(x)\leq 0\;\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles :

$\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $]1;+\infty[$

Le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	1	↗

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

a) sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: On a $f(x)=(h\circ g)(x)\quad\forall x\in D_f$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	0 ↘	‖	↘

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: $g(x)\in[0;+\infty[$

(voir signe de g) et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$: $g(x)\in]-\infty;0]$

(voir signe de g) ; et h est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$

c) Sur $]1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x\in]1;+\infty[\;g(x)\in]0;+\infty[$

(Voir signe de g) et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$.

<u>5)le tableau de variations de f</u> :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗	‖	↘

$\rightarrow$Le nombre 1 est le minimum relatif de f en $-\frac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien