http://www.xriadiat.com **DS1: A** PROF: ATMANI NAJIB

# 1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

## *Correction :* Devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

LA LOGIQUE ET ENSEMBLES ET APPLICATIONS

**Durée :2 heures**

**Exercice 1 :** (9pts) : (1,5pts×6)

Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) ; x+\frac{16}{x} \succ 8$

2) $P_2 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+5}{n+4} \neq 1$

3) $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^* ; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$

4) $P_4 : (\forall n \in \mathbb{N}) ; n^2+3n+2023$ est un entier impair

5) $P_5 : \forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R} \; (x+3)(y-3)=(x-3)(y+3) \Rightarrow x=y$

6) $P_6 : \forall n \in \mathbb{N} ; n^3-n$ est divisible par 3

**Solution :** 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}^{*+}) ; x+\frac{16}{x} \leq 8$ est vraie

En effet : pour $(4 \in \mathbb{R}^{*+})$ *et* $4+\frac{16}{4}=8 \leq 8$ ($x=4$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$ : est vraie par suite $P_1$ : est <u>fausse</u>

Remarque : comment faire pour trouver ce contre-exemple ?

$x+\frac{16}{x} \succ 8 \Leftrightarrow \frac{x^2+16}{x} \succ 8 \Leftrightarrow x^2+16 \succ 8x \Leftrightarrow x^2-8x+16 \succ 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \succ 0$

Mais cette inégalité n'est pas vérifiée pour : $x=4$

2)Montrons que : $P_2 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+5}{n+4} \neq 1$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$ : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{n+5}{n+4}=1$

$\frac{n+5}{n+4}=1 \Leftrightarrow n+5=n+4 \Rightarrow 5=4$ ! C'est une contradiction car on sait que : $5 \neq 4$

Ceci signifie : $P_2 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+5}{n+4} \neq 1$ est vraie

$\overline{P_2} : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n+5}{n+4}=1$

**3)** Montrons que : $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^* ; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$ est vraie

Utilisons un Raisonnement par contraposition :





Montrons que : $\frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y} \Rightarrow x=y$ est vraie

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ *et* $y \in \mathbb{R}^*$ ;

On a : $\frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y} \Rightarrow x(5+y)=y(5+x) \Rightarrow 5x+xy=5y+xy \Rightarrow 5x=5y \Rightarrow x=y$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; \forall y \in \mathbb{R}^* \; \frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y} \Rightarrow x=y$

Alors par contraposition on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$

Ceci signifie : $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^* ; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$ **est vraie**

$\overline{P_3} : \exists x \in \mathbb{R}^* ; \exists y \in \mathbb{R}^* : x \neq y$ *et* $\frac{x}{5+x}=\frac{y}{5+y}$

4) $P_4 : (\forall n \in \mathbb{N}) ; n^2+3n+2023$ est un entier impair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de n , il est parfois utile de faire une **disjonction de cas** : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre n.

On peut, par exemple, séparer les cas où n est un entier pair des cas où n est impair

<u>Premier cas :</u> si $n$ est pair : alors $n^2$ est aussi pair (comme produit de nombres pairs)

Alors : $3n$ est pair (comme produit d'un nombre pair et un nombre impair)

Donc : $n^2+3n$ est pair (comme somme de nombres pairs)

D'autre part : $2023$ est impair

Donc : $n^2+3n+2023$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

<u>2 iem cas :</u> si $n$ est impair : alors $n^2$ est aussi impair (comme produit de nombres impairs)

Alors : $3n$ est impair (comme produit de nombres impairs)

Donc : $n^2+3n$ est pair (comme somme de nombres impairs)

D'autre part : $2023$ est impair

Donc : $n^2+3n+2023$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$P_4$ : « $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n^2+3n+2023$ est un entier impair » **est vraie**

$\overline{P_4} : (\exists n \in \mathbb{N}) / n^2+3n+2023$ est un entier pair

5) Montrons que : $P_5 : \forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R} \; (x+3)(y-3)=(x-3)(y+3) \Rightarrow x=y$ est vraie ?

Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$ ;

On a : $(x+3)(y-3)=(x-3)(y+3) \Rightarrow xy-3x+3y-6=xy+3x-3y-6$

$\Rightarrow -6x=-6y \Rightarrow x=y$

Donc : $(x+2)(y-2)=(x-2)(y+2) \Rightarrow x=y$

La proposition $P_5$ : est vraie

$\overline{P_5} : \exists x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R} \; (x+3)(y-3)=(x-3)(y+3)$ *et* $x \neq y$

6) Montrons $P_6$ : « $\forall n \in \mathbb{N} ; n^3-n$ est divisible par 3 » est vraie ?





Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \exists k \in \mathbb{N} / n^3-n=3k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3-0=0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3-n=3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3-(n+1)=3k'$ ??

$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(n^3-n)+3n^2+3n=3k+3(n^2+n)=3(k+n^2+n)=3k'$

Avec $k'=k+n^2+n \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $P_6$ : « $\forall n \in \mathbb{N} ; n^3-n$ est divisible par 3 » est vraie

$\overline{P_6}$ : « $\exists n \in \mathbb{N} ; n^3-n$ n'est pas divisible par 3 »

**Exercice2: :** (11pts) : (0,5pt+1,5pt+2pt+2pt+1pt+1pt+1pt+2pt)

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x-1}$ et $f(x)=-x^2+2x+1$ et $(C_f)$ et $(C_g)$ Les courbes représentatives de f et g

1) Vérifier que : $(C_f)$ et $(C_g)$ se coupent en : $A(2;1)$

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) Tracer les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2-2x-1+\sqrt{x-1} \prec 0$

5) Déterminer graphiquement les images de $[0;1]$ et $[1;2]$ pat f

6) On considère la fonction $h$ tel que : $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$

a) Déterminer $D_h$

b) Vérifier que : $h(x)=(g \circ f)(x) \quad \forall x \in D_h$

c) Étudier la monotonie de $h$ dans: $[0;1]$ et $[1;2]$

**Solution :**1) $f(2)=g(2)=1 \Rightarrow A(2;1) \in (C_f) \cap (C_g)$

2) Déterminons les tableaux de variations de f et g

Pour : $g(x)=\sqrt{x-1} \quad D_g=\{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\}=[1,+\infty[$

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

Pour : $f(x)=-x^2+2x+1$ ; On a $f$ est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

On utilisant le résumé de notre cours :

On a : $a=-1 \prec 0$ et $b=2$ et $c=1$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

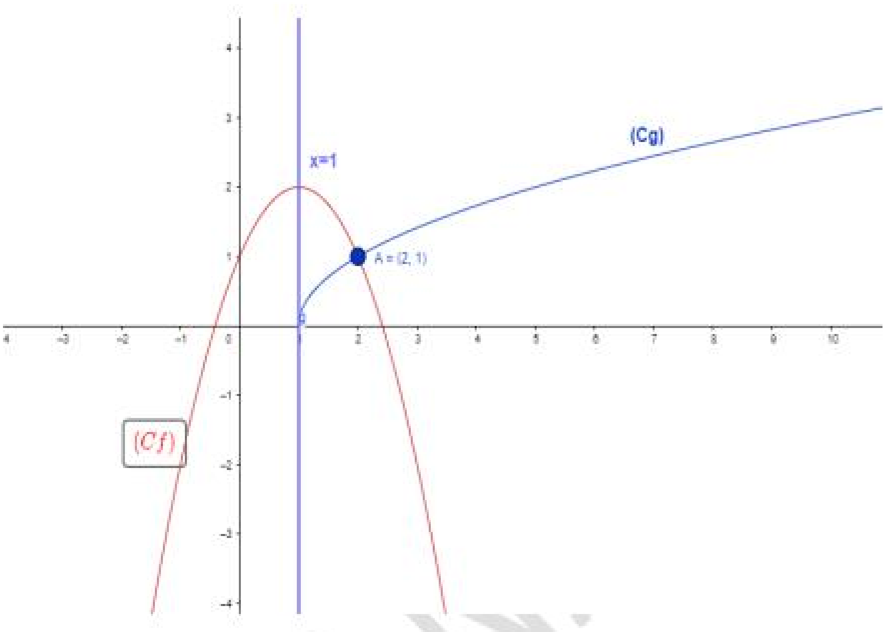
$\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1$ et $f(\alpha)=f(1)=-(1)^2+2\times1+1=2$





Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | $2$ | ↘ |




3) Traçage des courbes $(C_f)$ $(C_g)$ dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résolution graphique de l'inéquation $x^2-2x+2+\sqrt{x-1} \prec 0$ :

$x^2-2x-1+\sqrt{x-1} \prec 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x-1} \prec -x^2+2x+1 \Leftrightarrow g(x) \prec f(x)$

Graphiquement la courbe $(C_f)$ est au-dessus de $(C_g)$ si $x \in [-4;-1[ \cup [0;+\infty[$

Donc : $S=]1;2[$

5) Détermination graphique des images de $[0;1]$ et $[1;2]$ pat f

$f([0;1])=[1;2]$ et $f([1;2])=[1;2]$

6) On considère la fonction $h$ tel que : $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$

$D_h=\{x \in \mathbb{R} / -x^2+2x \geq 0\}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x2+2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $D_h=[0;2]$

b) Vérifions que : $h(x)=(g \circ f)(x) \quad \forall x \in D_h$ ; On a : : $g(x)=\sqrt{x-1}$ et $f(x)=-x^2+2x+1$

Donc : $(g \circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{-x^2+2x+1-1}=\sqrt{-x^2+2x}=h(x)$ ; $\forall x \in [0;2]$

c) Etude de la monotonie de $h$ dans : $[0;1]$ et $[1;2]$

On a : $h(x)=(g \circ f)(x)$

Puisque f est croissante sur $[0;1]$ et $f([0;1])=[1;2]$ et g est croissante sur $[1;2]$ alors $g \circ f$ est croissante sur $[0;1]$

Puisque f est décroissante sur $[1;2]$ et $f([1;2])=[1;2]$ et g est croissante sur $[1;2]$ alors $g \circ f$ est décroissante sur $[1;2]$

**PROF: ATMANI NAJIB**

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*